

DOCUMENT DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université Paris-Dauphine)
Unité de Recherche Associée au CNRS n° 825

ELECTRE III-IV, version 3.x ASPECTS MÉTHODOLOGIQUES (tome 1)

DOCUMENT N° 85 ¹
juillet 1994

D. VALLÉE ²
P. ZIELNIEWICZ ³

¹ Ce document annule et remplace le document n° 25 (J.M. Skalka, D. Bouyssou, D. Vallée).

² LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, F-75775 Paris Cedex 16.
Téléphone : + 33-1-44-05-44-72 ; e.mail : vallee@lamsade.dauphine.fr.

³ Institute of Computing Science, Technical University of Poznan, Pologne.

COLLECTION DES CAHIERS ET DOCUMENTS DU LAMSADE

La collection des Cahiers et Documents du LAMSADE publie, en français ou en anglais, les travaux effectués par les chercheurs au sein même du laboratoire mais aussi les travaux menés en liaison étroite avec les collaborateurs du LAMSADE ou avec d'autres chercheurs, principalement à la suite d'un séjour au LAMSADE. Certains de ces travaux peuvent avoir fait l'objet d'une communication à un congrès qui est alors mentionné.

Toute proposition de Cahier ou Document pour publication est transmise au Comité de Rédaction qui le soumet, pour critique et discussion avec l'auteur, à un spécialiste du sujet traité. Toutefois, les opinions émises n'engagent que leurs auteurs.

Ces textes peuvent ensuite être soumis pour publication dans des revues spécialisées à un niveau international.

Un comité de rédaction anime cette collection.

Les Cahiers et Documents peuvent être consultés à la Bibliothèque du LAMSADE. Pour se les procurer, s'adresser au Secrétariat de Rédaction.

"CAHIERS ET DOCUMENTS" FROM LAMSADE

The LAMSADE series "Cahiers et Documents", published in French and in English, includes monographs and articles by members of the LAMSADE Research Group as well as papers on joint projects usually completed by visiting scholars in conjunction with members of the LAMSADE Group. Papers originally presented at conferences or colloquia always bear the name and date of the initial communication.

All manuscript submitted for publication in the "Cahiers et Documents" series are referred to an external examiner for evaluation and discussion with the author. Nevertheless, the authors assume full responsibility for all opinions expressed therein.

Articles appearing in the series may subsequently be submitted for publication to specialized journals distributed internationally.

The series is coordinated by an Editorial Board.

LAMSADE "Cahiers et Documents" can be consulted in the LAMSADE Library. Requests for back numbers should be addressed to the Editorial Secretary.

COMITÉ DE RÉDACTION (EDITORIAL BOARD)

Responsable de la publication (*Editor*) : Bernard ROY.

Comité de Rédaction (*Editorial Board*) : Odile BAUDET, Denis BOUYSSOU, Vidal COHEN,
Eric JACQUET-LAGRÈZE, Daniel NEBENHAUS, Pierre TOLLA.

Secrétariat de Rédaction (*Editorial Secretary*) : Dominique FRANÇOIS.

LABORATOIRE D'ANALYSE ET MODÉLISATION DE SYSTÈMES POUR L'AIDE À LA DÉCISION (LAMSADE)

(Unité de Recherche Associée au CNRS n° 825)

Responsable : Bernard ROY

PUBLICATIONS DISPONIBLES ¹

CAHIERS

- N° 3 – B. ROY : A conceptual framework for a normative theory of "decision aid" (février 1976). 37 p.
- N° 10 – J. ABADIE, F. MESLIER : Présentation synthétique de modèles de prévision à très court terme de l'énergie journalière produite par Electricité de France et de la température moyenne journalière relevée à Paris-Montsouris (octobre 1977). 45 p.
- N° 13 – E. JACQUET-LAGRÈZE, B. ROY, J. MOSCAROLA, G. HIRSCH : Description d'un processus de décision – I : Quelques concepts (février 1978). 40 p.
- N° 14 – R. CANONNE, J.L. DAMRET, J.P. KIEFFER : Etude des contraintes liées à la prise de décision en gestion de production (février 1978). 25 p.
- N° 15 – B. ROY, G. CHAUVIN, M.C. PORTMANN : La catégorie des modèles d'ordonnancement : essai de définition (mars 1978). 39 p.
- N° 17 – G. HIRSCH, E. JACQUET-LAGRÈZE, J.C. MARCHET : Description d'un processus de décision – II : Illustration : Le cas de la raffinerie de Brest (juillet 1978). 23 p.
- N° 28 bis – B. ROY, Ph. VINCKE : Relational systems of preference with one or several pseudo-criteria: New concepts and new results (février 1982). 36 p.
- N° 30 – Y.A. BERNABEU : Discrétisation d'un pavé de R^n soumis à des contraintes linéaires et énumération des actions efficaces : le programme ENUMEF (juillet 1980). 39 p.
- N° 31 – J.P. ROHMER, J.O. VERET : Choix d'une stratégie commerciale dans la distribution succursaliste en présence de critères multiples (juillet 1980). 56 p.
- N° 33 – E. JACQUET-LAGRÈZE : Processus de décision et de comportement en matière de déplacements privés – Concepts et modèles théoriques (juin 1980). 55 p.
- N° 34 – E. JACQUET-LAGRÈZE, B. ROY : Aide à la décision multicritère et systèmes relationnels de préférences (juillet 1980). 27 p.
- N° 36 – R. SLOWINSKI : Problèmes d'allocation de moyens limités en présence de critères multiples (juin 1981). 48 p.
- N° 37 – B.H. MASSAM : The search for the best route: An application of a formal method using multiple criteria (juin 1981). 21 p.
- N° 38 – J. SISKOS : Evaluating a system of furniture retail outlets using an interactive ordinal regression method (janvier 1982). 44 p.
- N° 39 – V. COHEN : Les tableaux à n entrées – Rappel de quelques questions et solution d'un problème de caractérisation (mars 1982). 31 p.

¹ Pour se les procurer, s'adresser au LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, 75775 PARIS CEDEX 16 (Bureau P 613, Tél. 33-1-44-05-44-66).

- N° 40 – B.H. MASSAM : A comparison of descriptive approaches to multiple-criteria decision making problems (mars 1982). 30 p.
- N° 41 – J. SISKOS, Ph. HUBERT : Multicriteria analysis of the impacts of energy alternatives: A survey and a new comparative approach (octobre 1982). 49 p.
- N° 43 – J. SISKOS : Le traitement des dégénérescences en programmation linéaire continue (février 1983). 38 p.
- N° 44 – E. JACQUET-LAGRÈZE, M. SHAKUN : Decision support systems for semi-structured buying decisions (février 1983). 31 p.
- N° 45 – J. SISKOS, G. WÄSCHER, H.M. WINKELS : A Bibliography on Outranking Approaches (1966-1982) (février 1983). 31 p.
- N° 46 – I. PAPALIGOURAS : Intervention et action sur les processus de décision de la grande entreprise économique : Construction d'une métaméthode (juin 1983). 36 p.
- N° 46 bis – I. PAPALIGOURAS : Intervention and action on decision processes of the large firm: Constructing a metamethod (juillet 1983). 37 p.
- N° 47 – B. ROY, D. BOUYSSOU : Comparison of two decision-aid models applied to a nuclear power plant siting example (juillet 1983). 43 p.
- N° 48 – J.M. DEVAUD : Discrimination par l'ajustement de variables indicatrices (septembre 1983). 32 p.
- N° 49 – J. SISKOS, D. YANNAKOPOULOS : Amélioration de la méthode UTA par introduction d'une double fonction d'erreurs (octobre 1983). 19 p.
- N° 50 – J. MOSCAROLA : Marketing politique et aide à la décision – Un exemple de micro-informatique interactive appliquée à l'élaboration d'une campagne électorale (octobre 1983). 42 p.
- N° 51 – B. ROY : Quelques remarques sur le concept d'indépendance dans l'aide à la décision multicritère (novembre 1983). 20 p.
- N° 52 – D. BOUYSSOU : Decision-and and utility theory: A critical survey (novembre 1983). 43 p.
- N° 53 – P. NAEGEL : Décisions et optimisation dans un système à trois acteurs (novembre 1983). 36 p.
- N° 54 – J. SISKOS : Analyse de régression et programmation linéaire (mai 1984). 28 p.
- N° 55 – P. VALLIN : Méthodes robustes pour le traitement de séries chronologiques (juin 1984). 49 p.
- N° 56 – N. LEMAITRE : La culture comme instrument de gestion et de décision dans l'entreprise (novembre 1984). 51 p.
- N° 57 – J.C. VANSNICK : On the problem of weights in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach) (février 1985). 24 p.
- N° 58 – J. SISKOS, J. LOMBARD, O. OUDIZ : The use of outranking methods in the comparison of control options against a chemical pollutant: The case of vinyl chloride monomer (février 1985). 37 p.
- N° 59 – D. BOUYSSOU, J.C. VANSNICK : Noncompensatory and generalized noncompensatory preference structures (avril 1985). 29 p.
- N° 60 – P. HANSEN, B. JAUMARD, M. MINOUX : Un algorithme linéaire en temps espéré pour déduire toutes les conclusions logiques induites par un ensemble d'inégalités booléennes (mai 1985). 44 p.
- N° 61 – S. PADRAZZI : Le coût de la maladie (juin 1985). 50 p.
- N° 62 – B. ROY : Meaning and validity of interactive procedures as tools for decision making – Sens et validité des procédures interactives en tant qu'outils en matière d'aide à la décision (juillet 1985). 21 p.
- N° 63 – S. BASTIDE : Gestion des risques : Une approche psycho-sociale (juillet 1985). 71 p.
- N° 64 – D. BOUYSSOU, B. ROY : La notion de seuils de discrimination en analyse multicritère (juillet 1985). 33 p.
- N° 65 – J. SISKOS, C. ZOPOUNIDIS : The evaluation criteria of the venture capital investment activity: An interactive assessment (juillet 1985). 34 p.
- N° 66 – C. ZOPOUNIDIS : Evaluation multicritère du risque de faillite d'entreprises: Méthodologie et application (octobre 1985). 45 p.

- N° 67 – E. JACQUET-LAGRÈZE, R. MEZIANI, R. SLOWINSKI : MOLP with an interactive assessment of a piecewise linear utility function (janvier 1986). 29 p.
- N° 68 – D. BOUYSSOU : Some remarks on the notion of compensation in MCDM (janvier 1986). 30 p.
- N° 69 – N. GRASSIN : Constructing criteria "Population" for the comparison of different options of high voltage line route (mars 1986). 37 p.
- N° 70 – J.C. VANSNICK : De Borda et Condorcet à l'agrégation multicritère (mai 1986). 31 p.
- N° 72 – Ph. VINCKE : Structures (P, Q, I) de préférences (juin 1986). 30 p.
- N° 73 – F. RENARD : Utilisation d'ELECTRE dans l'analyse des réponses à un appel d'offres : Le cas de la machine de tri paquets à la Direction Générale des Postes (juin 1986). 36 p.
- N° 75 – B. ROY : Main sources of inaccurate determination, uncertainty and imprecision in decision models (février 1987). 27 p.
- N° 76 – P. TOLLA : Validation numérique de l'algorithme de Karmarkar (avril 1987). 28 p.
- N° 77 – A. LISSER, N. MACULAN, M. MINOUX : Large steps preserving polynomiality in Karmarkar's algorithm (mai 1987). 23 p.
- N° 78 – D. NEBENHAUS : La participation aux décisions dans une PME – Etude de cas (mai 1987). 46 p.
- N° 79 – E. JACQUET-LAGRÈZE : A projection gradient method for linear programming (juin 1987). 27 p.
- N° 80 – B. ROY : Des critères multiples en Recherche Opérationnelle : Pourquoi ? (septembre 1987). 15 p.
- N° 81 – J. SISKOS, D.K. DESPOTIS : A multiobjective linear programming algorithm based on satisfactory goals and interactive utility assessment (octobre 1987). 30 p.
- N° 82 – P. TOLLA : Amélioration des performances de l'algorithme de Karmarkar dans le cas de programmes linéaires à variables bornées supérieurement (novembre 1987). 15 p.
- N° 83 – A.M.J. SKULIMOWSKI : Theoretical foundations for decision support systems based on reference points (décembre 1987). 40 p.
- N° 84 – E. JACQUET-LAGRÈZE, R. MEZIANI : Linear programming and interactivity – A manpower scheduling DSS (janvier 1988). 23 p.
- N° 87 – A. AGHA : Analyse canonique de deux cônes polyédriques convexes (novembre 1988). 37 p.
- N° 88 – D. BOUYSSOU : Modelling inaccurate determination, uncertainty, imprecision using multiple criteria (novembre 1988). 22 p.
- N° 89 – M.F. SHAKUN : Group Decision and Negotiation Support in Evolving, Nonshared Information Contexts (novembre 1988). 43 p.
- N° 90 – A. LISSER, P. TOLLA : Variants of Karmarkar's algorithm (mars 1989). 33 p.
- N° 91 – D. BOUYSSOU : Problèmes de construction de critères (avril 1989). 32 p.
- N° 94 – D.K. DESPOTIS, D. YANNAKOPOULOS : Méthode d'estimation d'utilités additives concaves en programmation linéaire multiobjectifs (septembre 1989). 26 p.
- N° 95 – B. ROY, R. SLOWINSKI : Criterion of distance between technical programming and socio-economic priority (deuxième version révisée : mars 1990). 29 p.
- N° 97 – B. ROY : Science de la décision ou science de l'aide à la décision ? (troisième version révisée : février 1992). 48 p.
- N° 98 – R. SLOWINSKI : Outranking-based interactive procedure for multiple objective programs (avril 1990). 24 p.
- N° 99 – H. M'SILTI, P. TOLLA : An interactive multiobjective nonlinear procedure (avril 1990). 31 p.
- N° 100 – J.M. MARTEL, K. ZARAS : Dominance stochastique en analyse multicritère face au risque (novembre 1990). 32 p.
- N° 101 – D. BOUYSSOU, P. PERNY : Ranking methods for valued preference relations: A characterization of a method based on leaving and entering flows (décembre 1990). 22 p.

- N° 102 – S. PINSON : A multi-expert architecture for credit risk assessment (mars 1991). 41 p.
- N° 104 – J.M. MARTEL, B. AOUNI : Méthode multicritère de choix d'un emplacement : Le cas d'un aéroport dans le Nouveau Québec (avril 1991). 45 p.
- N° 106 – B. ROY, D. BOUYSSOU : Decision-aid: an elementary introduction with emphasis on multiple criteria (novembre 1991). 30 p.
- N° 107 – J. GONDZIO : An advanced implementation of Cholesky factorization for computing projections in interior point methods of large scale linear programming (décembre 1991). 42 p.
- N° 108 – J. GONDZIO, D. TACHAT : The design and application of the IPMLO – A FORTRAN library for linear optimization with interior point methods (janvier 1992). 38 p.
- N° 109 – V. MOUSSEAU : Analyse et classification de la littérature traitant de l'importance relative des critères en aide multicritère à la décision (février 1992). 44 p.
- N° 110 – R. SLOWINSKI : A generalization of the indiscernibility relation for rough sets analysis of quantitative information (mai 1992). 34 p.
- N° 111 – V. MOUSSEAU : Are judgments about relative importance of criteria dependent or independent of the set of alternatives? An experimental approach (mai 1992). 42 p.
- N° 112 – V. Th. PASCHOS, L. RENOTTE : Approximability preserving reductions for NP-complete problems (janvier 1993). 37 p.
- N° 113 – H. M'SILTI, P. TOLLA : A new heuristic method for solving global optimization problem (janvier 1993). 34 p.
- N° 114 – L. DUCKSTEIN, W. TREICHEL, S. EL MAGNOUNI : Multicriterion analysis of groundwater management alternatives (janvier 1993). 40 p.
- N° 115 – A. JASZKIEWICZ, R. SLOWINSKI : The light beam search over a non-dominated set – an interactive procedure for multi-objective analysis of linear and non-linear programs (juin 1993). 29 p.
- N° 116 – M. DEMANGE, V.Th. PASCHOS : On an approximation measure founded on the links between optimization and polynomial approximation theory (septembre 1993). 38 p.
- N° 117 – C.A. BANA e COSTA, J.C. VANSNICK : Sur la quantification des jugements de valeur : l'approche MACBETH (septembre 1993). 47 p.
- N° 118 – O. CORDEIRO-NETTO, E. PARENT, L. DUCKSTEIN : Evaluation of two MCDM techniques for staging the multicriterion design of long-term water supply in Southern France (septembre 1993). 35 p.
- N° 119 – A. SCHAAL, H. M'SILTI, P. TOLLA : Modélisation et système interactif de planification de stocks liés (septembre 1993). 25 p.
- N° 120 – J.C. POMEROL, B. ROY, C. ROSENTHAL-SABROUX, A. SAAD : An "intelligent" DSS for the multicriteria evaluation of railway timetables (octobre 1993). 33 p.
- N° 121 – V.Th. PASCHOS : A relation between the approximated versions of minimum set covering, minimum vertex covering and maximum independent set (octobre 1993). 21 p.
- N° 122 – V. MOUSSEAU : Compensatoriness of preferences in matching and choice (janvier 1994). 27 p.
- N° 123 – A. TSOUKIAS, Ph. VINCKE : A new axiomatic foundation of the partial comparability theory (février 1994). 38 p.
- N° 124 – B. ROY, H. HASSAN : Intérêt des méthodes multicritères pour l'aide à la décision concernant les investissements en matière d'infrastructures de transports (juin 1994). 24 p.

DOCUMENTS

- N° 13 – H.M. WINKELS : Complete efficiency analysis for linear vector maximum systems: Theoretical background and an algorithm (juillet 1980). 85 p.
- N° 18 – J.L. RIGAL : L'absentéisme comme indicateur social (juillet 1983). 39 p.
- N° 24 – B. ROY, M. PRÉSENT, D. SILHOL : Programmation de la rénovation des stations du métro parisien : un cas d'application de la méthode ELECTRE III (juillet 1983). 67 p.
- N° 30 – B. ROY, J.M. SKALKA : ELECTRE IS – Aspects méthodologiques et guide d'utilisation (septembre 1984). 125 p.
- N° 34 – C.J. MAESTRE : Histoire et contenu d'une approche des systèmes (septembre 1985). 273 p.
- N° 38 – D. VANDERPOOTEN : L'approche interactive dans l'aide à la décision multicritère (avril 1987). 57 p.
- N° 40 – L. VALADARES-TAVARES : Un système relationnel de préférences multi-critère à transitivité généralisée (juin 1987). 59 p.
- N° 43 – C.J. MAESTRE : Aux racines de la gestion : La culture (février 1988). 92 p.
- N° 44 – J.SISKOS, C. ZOPOUNIDIS : Assessing a venture capital firm's preference model using multicriteria analysis (février 1988). 44 p.
- N° 45 – J. ABADIE, M. M'SILTI : La programmation mathématique multiobjectif et la gestion des ressources en eau (mars 1988). 63 p.
- N° 46 – G.P. PRASTACOS, M. DAVIS-MORADKHAN : La gestion des ressources sanguines à Paris (Un aperçu du système actuel) (mai 1988). 139 p.
- N° 47 – E. PARENT, P. SCHNÄBELE : Le choix d'un aménagement aquacole – Exemple d'utilisation de la méthode ELECTRE III et comparaison avec d'autres méthodes multicritères d'aide à la décision (septembre 1988). 68 p.
- N° 50 – M. DEZA, M. LAURENT : Facets of the complete cut cone (avril 1989). 57 p.
- N° 51 – B. ROY : Decision-aid and decision-making (mai 1989). 30 p.
- N° 53 – B. ROY : The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods (juillet 1989). 40 p.
- N° 55 – G. BAROUCH : Les conflits au risque des théories de Palo Alto : Le cas de l'aménagement de la Cisse (septembre 1989). 82 p.
- N° 56 – E. KONARZEWSKA : BIPOLAR: Multiple criteria decision aid using BIPOLAR reference system (septembre 1989). 60 p.
- N° 57 – M. DEZA, M. LAURENT : Facets for the complete cut cone II: Clique-Web inequalities (octobre 1989). 54 p.
- N° 59 – C.A. BANA e COSTA : Une méthode pour l'aide à la décision en situations multicritères et multiacteurs (décembre 1989). 66 p.
- N° 61 – A. DAVID, J.L. GIORDANO : Rôle des représentations graphiques et analytiques simples dans le développement de la coopération Marketing/Bureau d'Etudes chez un grand constructeur automobile (avril 1990). 53 p.
- N° 62 – Ph. VINCKE : Exploitation d'une relation non évaluée dans une problématique de rangement complet (janvier 1991), 47 p.
- N° 63 – M. NAKHLA : Le processus de décision dans le système politico-administratif départemental – Utilisation d'une procédure multicritère d'aide à la décision pour la programmation et la gestion des chemins départementaux (CD) (février 1991), 71 p.
- N° 65 – B. ROY, R. SLOWINSKI, W. TREICHEL : Multi-criteria programming of rural water supply systems (mai 1991), 54 p.
- N° 73 – G.R. D'AVIGNON : Démarche d'aide à la décision d'un plan directeur : Le cas des palais de justice (mars 1992). 65 p.
- N° 74 – W. YU : ELECTRE TRI – Aspects méthodologiques et manuel d'utilisation (avril 1992). 100 p.

- N° 78 – Ph. VAN ASBROECK, D. CHAMP-BRUNET : Un thésaurus français-anglais de termes d'aide multicritère à la décision (mars 1993). 86 p.
- N° 79 – Rapport Scientifique (1991-1992) (mai 1993). 229 p.
- N° 79 bis – Extrait du Rapport Scientifique (1991-1992) (juillet 1993). 101 p.
- N° 80 – C.A. BANA e COSTA : Les problématiques dans le cadre de l'activité d'aide à la décision (septembre 1993). 68 p.
- N° 81 – C.A. BANA e COSTA, Ph. VINCKE : Comment prendre en compte l'imprécision des taux de substitution dans un modèle additif d'agrégation des préférences (novembre 1993). 59 p.
- N° 82 – V. GABREL : La planification à moyen terme des prises de vue à réaliser par un satellite défilant d'observation de la terre : modélisation et solutions algorithmiques (janvier 1994). 42 p.
- N° 83 – L. DUCKSTEIN, G. EDER, H.P. NACHTNEBEL : Ranking water resources alternatives and criteria by multicriterion Q-analysis: An Austrian case study (juin 1994). 49 p.
- N° 84 – C.J. MAESTRE : A propos des relations entre culture et gestion – Une illustration opérationnelle : Gestion par produit, gestion par processus (juin 1994). 73 p.
- N° 85 – D. VALLÉE : ELECTRE III-IV, version 3.x – Aspects méthodologiques (tome 1) (juillet 1994). 67 p.

Ce document répond à 2 objectifs : présenter succinctement les méthodes ELECTRE III et ELECTRE IV d'une part et, d'autre part, aider l'utilisateur des versions 3.x du logiciel ELECTRE III-IV. Pour cette raison, il est constitué de deux tomes : le premier constitue une aide méthodologique et présente les différents concepts des méthodes ELECTRE III et ELECTRE IV ; le second tome* est davantage lié aux aspects informatiques et à l'utilisation proprement dite du logiciel. Le tome I est composé du Chapitre I et des annexes 1, 2, 3, le tome II est composé des chapitres II et III et de l'annexe 4.

Cette version du logiciel ELECTRE III-IV est disponible au LAMSADE à partir de juillet 1994. Elle a été développée en Borland C++ par Piotr Zielniewicz de l'Institut d'Informatique de l'Université Technique de Poznan sous la direction conjointe de Bernard Roy et Roman Slowinski et tourne sous Windows 3.1 sur PC. Vous trouverez au chapitre 2 des conseils pour l'installation sur le disque dur.

Le chapitre I fournit une présentation rapide des méthodes ELECTRE III et ELECTRE IV. Il est recommandé, pour acquérir une connaissance plus approfondie de ces méthodes, de se reporter au livre de Bernard Roy et Denis Bouyssou (cf. [ROY-1993]). Vous pourrez également vous familiariser au chapitre I avec la nature des résultats proposés par le logiciel et vous y trouverez une présentation du jeu de données-exemple fourni avec le programme, exemple qui sert de référence tout au long de ce document. Enfin, le dernier paragraphe de ce chapitre présente les différents menus accessibles dans le logiciel.

Les annexes permettent d'approfondir la connaissance du concept primordial de pseudo-critère (annexe 1), de détailler les calculs effectués dans la phase d'agrégation aussi bien dans ELECTRE III (annexe 2) que dans ELECTRE IV (annexe 3).

Le chapitre II, après quelques conseils d'installation sur le disque dur, propose une série de copies d'écran qui ont pour objet de guider l'utilisateur dans les différentes étapes de la conception et de l'exploitation de ses données.

Le chapitre III consiste en une copie du texte de l'aide qui est accessible, en ligne, à partir de chaque écran. Ce texte constitue à la fois une aide technique et méthodologique pour l'utilisation du logiciel.

L'annexe 4 aide à mieux comprendre le processus de distillation qui constitue la deuxième phase des méthodes ELECTRE III et ELECTRE IV, en particulier en détaillant les calculs concernant l'exemple de référence.

Une bibliographie concernant d'une part les méthodes et d'autre part les applications ainsi qu'un index viennent compléter ce manuel.

* Le tome 2 n'est livré qu'avec le logiciel.

SOMMAIRE

TOME 1

CHAPITRE 1 : MÉTHODE	1
I-1 Présentation générale des méthodes ELECTRE III et ELECTRE IV	1
I-2 Les différents modes de construction du surclassement	1
I.2.1 Méthode ELECTRE III : calcul des indices de concordance et des indices de discordance	2
I.2.2 Méthode ELECTRE IV : relations de surclassement emboîtées	3
I.2.3 Saisie directe d'une matrice de degrés de crédibilité	4
I.3 Algorithme de classement	4
I.3.1 Principes généraux	4
I.3.2 Les résultats - Remarques	5
I.4 Construction du préordre intersection	5
I.4.1 Mode de construction	5
I.4.2 Les résultats finaux	6
I.5 Exemple de référence	7
I.6 Menus et commandes accessibles dans le logiciel	9
 ANNEXE 1 : LES SEUILS	 11
1. Le concept de pseudo-critère	11
2. Les différents modes de calcul des seuils	13
 ANNEXE 2 : ELECTRE III CONSTRUCTION DE LA RELATION DE SURCLASSEMENT FLOUE PAR LE CALCUL DES INDICES DE CONCORDANCE ET DE DISCORDANCE	 17
1. Objectif et nature des données	17
EXEMPLE DE RÉFÉRENCE :	17
2. Calcul de l'indice de concordance associé à chaque pseudo-critère	18
APPLICATION A L'EXEMPLE DE RÉFÉRENCE	21
3. Agrégation des préférences partielles en une relation binaire floue unique	28
4. Calcul des indices de discordance	29
EXEMPLE DE RÉFÉRENCE	32
5. La relation de surclassement floue	35
EXEMPLE DE RÉFÉRENCE	36
6. Compléments sur les seuils inverses	37
 ANNEXE 3 : ELECTRE IV	 39
CONSTRUCTION DE LA RELATION DE SURCLASSEMENT FLOUE PAR L'INTRODUCTION DES RELATIONS DE SURCLASSEMENT EMBOÎTÉES	 39
1. Objectif et nature des données	39
2. La relation de surclassement floue	41
EXEMPLE DE RÉFÉRENCE	42
 BIBLIOGRAPHIE :	 49

TOME 2*

CHAPITRE 2 : EXEMPLE D'UNE SESSION ELECTRE	53
INSTALLATION DE ELECTRE III	55
CHAPITRE 3 : COMMANDES DU LOGICIEL	109
1 - Créer un nouveau projet	110
2 - Importer depuis l'ASCII	110
3 - Exporter vers ASCII	111
4 - Imprimer	111
5 - Configurer l'imprimante	111
6 - Références du projet	112
7 - Liste des critères	112
8 - Editer un critère	113
9 - Editer une performance	114
10 - Liste des actions	114
11 - Editer une action	115
12 - Editer les performances	116
13 - Seuils	116
14 - Seuils sur un critère	117
15 - Valeurs des seuils sur l'échelle des performances	119
16 - Edition de la matrice de degrés de crédibilité	120
17 - Traitement	120
18 - Méthode	121
19 - Options avancées	122
20 - Informations	122
21 - Statistiques	123
22 - Résultats	123
23 - Distillations	123
24 - Rangs dans le préordre final	124
25 - Préordre médian	124
26 - Matrice de concordance	125
27 - Matrice des degrés de crédibilité	125
28 - Matrice du préordre final	126
29 - Graphe	126
30 - Options - Résultats	126
31 - Préférences	127
32 - Sauver les options	127
ANNEXE 4 : ALGORITHME DE CLASSEMENT	128
1. Objectif et nature des données	128
2. Principe général de l'algorithme	128
3. Exemple de référence	131
4. Résultat final	143
5. Préordre médian	145

* Ce volume n'est livré qu'avec le logiciel.

INDEX

Ceci ne constitue pas un véritable index au sens propre du terme. Vous ne trouverez pas une entrée à chaque occurrence du mot dans le texte. Seules sont signalées les pages où le concept concerné est suffisamment détaillé.

Les pages 1 à 52 concernent le tome I, les pages 53 à 146 concernent le tome II.

- agrégation : 28
- algorithme de classement : 4, 128-143
- analyse de robustesse : 101
- aperçu de la valeur des seuils : 71, 119
- boutons : 57, 59, 89
- code des actions : 65, 115
- code des critères : 61, 113
- contraintes sur les seuils : 12, 119
- degrés de crédibilité : 35, 41, 85, 125
- distillations : 4-5, 81, 123, 128-143
- dominance canonique : 40, 121
- ELECTRE III : 2-3, 17-38, 75, 121
- ELECTRE IV : 3, 39-48, 75, 95-97, 121
- exécution des calculs : 77, 120
- exemple de référence : 7-8, 17-18, 21-28, 29, 32-35, 36, 42-48, 143-146
- graphe
 - voir préordre partiel, final
- impression : 99, 111
- indices de concordance globaux : 28, 83, 125
- indices de concordance partiels : 2, 18-28
- indices de discordance : 2, 29-35
- installation : 55
- matrice de concordance
 - voir indices de concordance globaux
- menus : 9
- mode matrice de crédibilité : 4, 103-107, 120
- modes de traitement : 1, 59, 75, 95, 121
- nom des actions : 65, 115
- nom des critères : 61, 113
- performances : 2, 3, 11, 17, 67, 114, 116
- poids, importance relative : 2, 28, 61, 69, 113

préordre médian : 6, 81, 124, 145, 146
préordre partiel, final : 4-6, 79, 81, 85, 124, 126, 144
projet : 57, 110, 112
pseudo-critère : 11-14, 17, 69, 116
pseudo-dominance : 40, 121
qualification d'une action : 5, 128-143
quasi-dominance : 40, 121
relation d'indifférence : 12, 14
relation de préférence faible : 12, 14
relation de préférence stricte : 12, 14
relation de surclassement floue : 14, 35, 41
relations de surclassement emboîtées : 39, 121
résultats : 6, 77-87, 89, 123, 126, 143
sauvegarde : 63
sens de préférences : 11, 13, 19-26, 30-34, 61, 69, 113
sessions simultanées : 101
seuil de coupe : 5, 42, 128-142
seuil de discrimination : 5, 42, 122, 128-142
seuils constants : 118
seuils d'indifférence : 11, 69,
 voir indices de concordance partiels
seuils de préférence : 12, 69
 voir indices de concordance partiels
seuils de veto : 12-13, 69
 voir indices de discordance
seuils directs, inverses : 13, 14-16, 37-38, 69, 118
seuils fonctions affines des performances : 13, 14, 69, 118
seuils proportionnels : 118
sous-dominance : 40, 121
transfert de données : 93, 110-111
veto-dominance : 40, 121
vrai-critère : 11

CHAPITRE 1 : MÉTHODE**I-1 Présentation générale des méthodes ELECTRE III et ELECTRE IV :**

Les méthodes ELECTRE III et ELECTRE IV se proposent de répondre à la problématique suivante : étant donné un ensemble A fini d'actions évaluées sur une famille cohérente de critères (cf. [ROY-1974], [ROY-1975]), partitionner A en classes d'équivalence et fournir un pré-ordre non nécessairement complet exprimant les positions relatives de ces classes.

Pour ce faire, elles procèdent en deux étapes :

- Construction d'une ou plusieurs relations de surclassement sur l'ensemble A. On dit que l'action a surclasse l'action b si a est au moins aussi bonne que b.
- Rangement de l'ensemble des actions. A partir de la ou des relations de surclassement, le programme génère deux classements construits différemment. L'intersection de ces deux préordres conduit à un préordre partiel ne retenant que les comparaisons les plus fondées entre les actions.

I-2 Les différents modes de construction du surclassement :

L'objet de la première étape de la méthode est :

- dans ELECTRE III (cf. [ROY-1978]) d'obtenir une relation de surclassement floue;
- dans ELECTRE IV (cf. [HUG-1982]) d'obtenir un ensemble de relations de surclassement nettes emboîtées.

Le type de données relatives aux actions à classer dont dispose le décideur dictera le choix de la méthode à utiliser.

Trois cas sont à distinguer : disposant d'un ensemble d'actions évaluées sur plusieurs pseudo-critères (voir définition en ANNEXE I), soit :

- Le décideur est en mesure d'exprimer l'importance relative des pseudo-critères en les pondérant (utilisation de la méthode ELECTRE III).
- Le décideur ne désire ou ne peut évaluer l'importance relative de chaque pseudo-critère (utilisation de la méthode ELECTRE IV) tout en estimant qu'aucun critère n'est négligeable ni prépondérant face à un regroupement quelconque d'une moitié des critères.
- L'utilisateur a construit une matrice de comparaison par paires des actions par une

méthode différente d'ELECTRE III ou d'ELECTRE IV. Les éléments de cette matrice sont compris entre 0 et 1 comme c'est le cas pour la relation de surclassement floue d'ELECTRE III. Il peut donc introduire directement ces données pour ne mettre en oeuvre que l'algorithme de classement (utilisation de la méthode "Matrice de degrés de crédibilité").

I.2.1 Méthode ELECTRE III : calcul des indices de concordance et des indices de discordance :

Pour chaque critère, on calcule successivement deux indicateurs par paire d'actions. L'un exprime dans quelle mesure les performances des actions sur les critères entrent en concordance avec l'assertion "a est au moins aussi bonne que b" ; l'autre indique dans quelle mesure elles s'y opposent. Les indicateurs de concordance partiels sont agrégés en tenant compte de l'importance relative des critères pour donner naissance à un indice de concordance global (on n'agrège pas les indices de discordance).

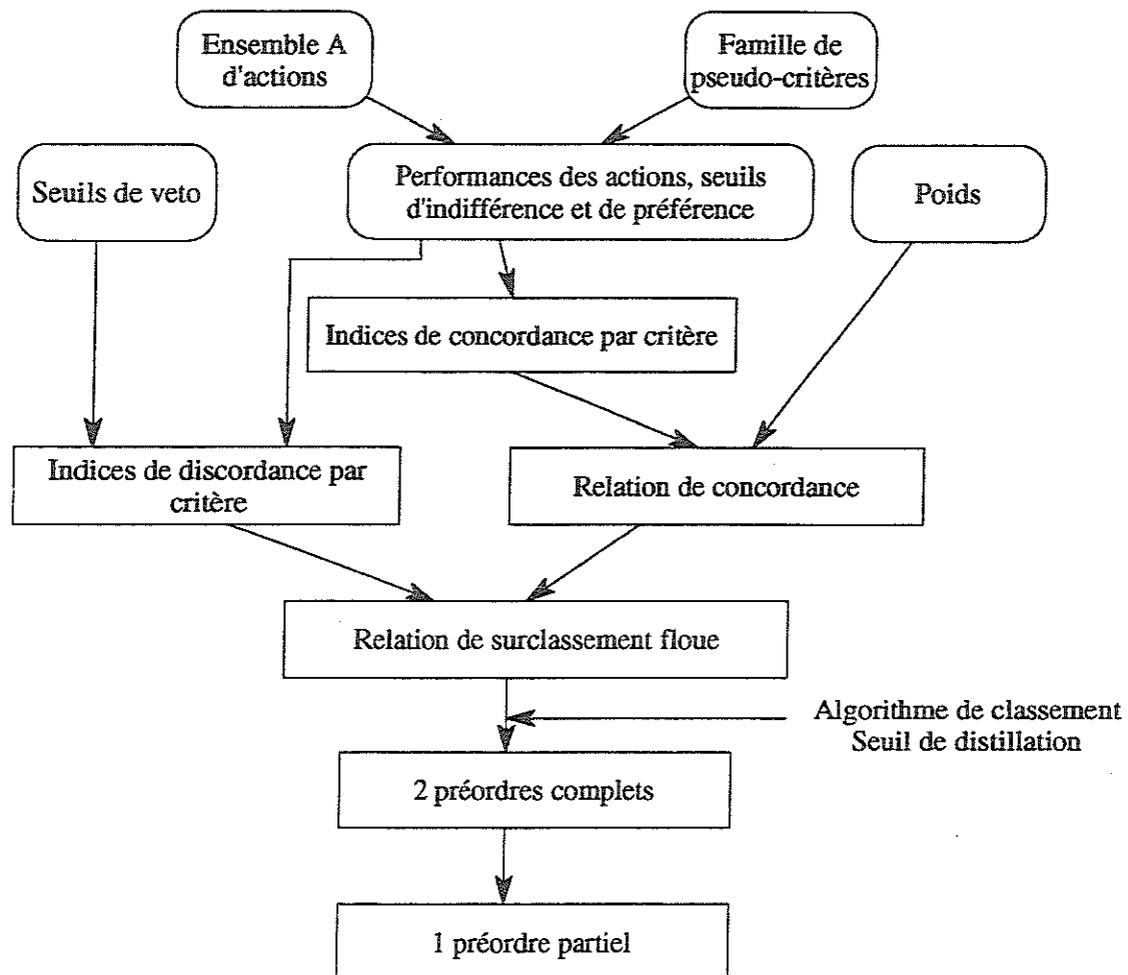


Figure 1 : Schéma général de la méthode ELECTRE III

Le degré de crédibilité, noté $d(a, b)$, que l'on peut accorder à l'affirmation "a surclasse b" est obtenu à partir de l'indice de concordance affaibli par les indices de discordance (parfois au point d'être annulé). L'indice de concordance (globale) n'est affaibli que par les indices de discordance (par critère) qui lui sont supérieurs (vous trouverez en ANNEXE 2 les méthodes de calcul des indices de concordance et des indices de discordance également appliqués à des exemples.).

I.2.2 Méthode ELECTRE IV : relations de surclassement emboîtées :

Lorsque le décideur n'est pas en mesure d'exprimer l'importance relative des critères, il devient impossible de construire la matrice de concordance, cette matrice étant la somme pondérée des indices de concordance partielle. Dans ce cas, on construit cinq relations de surclassement :

- la quasi-dominance : S_q ,
- la dominance canonique : S_c ,
- la pseudo-dominance : S_p ,
- la sous-dominance : S_s ,
- la veto-dominance : S_v

obtenues à partir de principes de sévérités décroissantes.

Vous trouverez en ANNEXE 3 les définitions de ces cinq relations et des exemples d'application au jeu de données de référence.

Pour chaque paire d'actions, on ne retient que le surclassement le plus exigeant en vue du classement des actions.

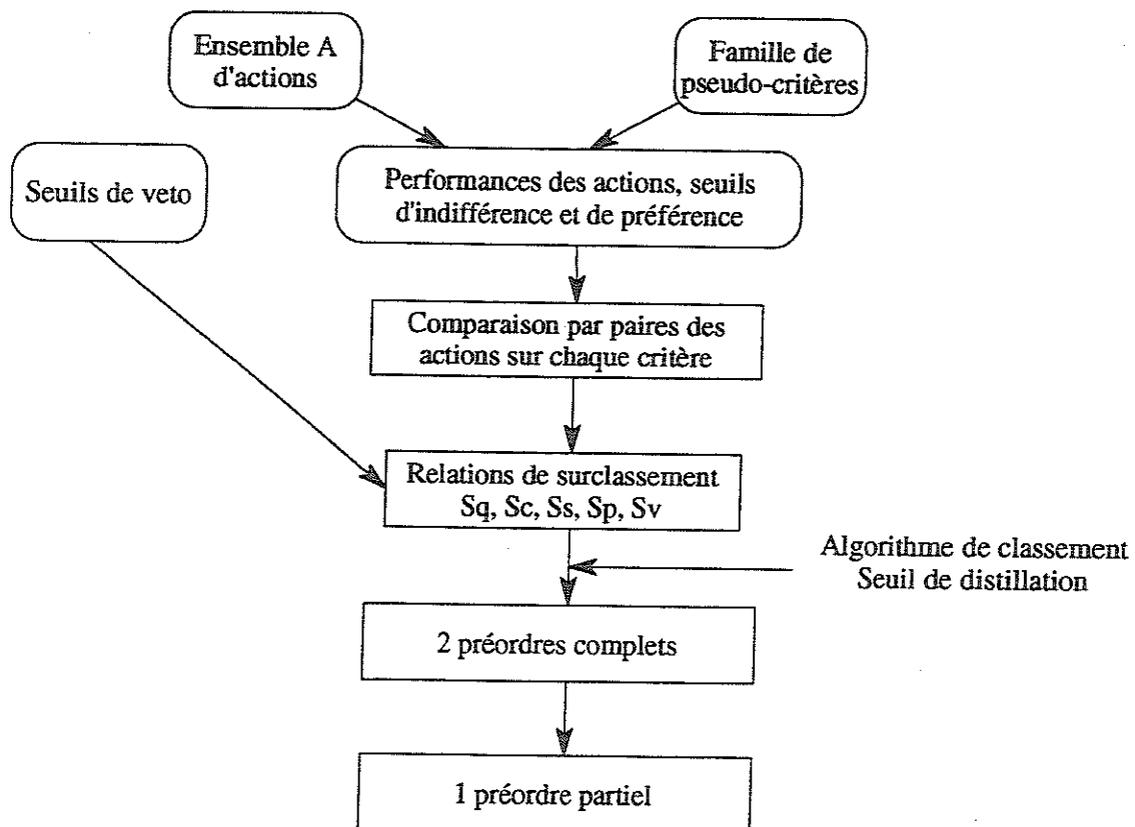


Figure 2 : Schéma général de la méthode ELECTRE IV

L2.3 Saisie directe d'une matrice de degrés de crédibilité :

D'autres méthodes de construction d'une relation de surclassement floue peuvent être employées suivant la nature des données de base recueillies.

Si l'utilisateur dispose ainsi d'une matrice de comparaison des actions par paire avec des indicateurs compris entre 0 et 1, il peut directement les introduire pour ne mettre en oeuvre que l'algorithme de classement (cf. ANNEXE 4).

I.3 Algorithme de classement

I.3.1 Principes généraux

L'objet de l'étape de classement est d'exhiber deux préordres les plus différents possibles à partir des relations de surclassement obtenues. Le premier préordre est obtenu de façon descendante, c'est-à-dire en sélectionnant tout d'abord les actions les meilleures, puis les suivantes jusqu'aux plus mauvaises. Le second préordre est obtenu de façon ascendante, c'est-à-dire en sélectionnant en premier lieu les actions les plus mauvaises pour finir par les meilleures.

Ces deux préordres étant le plus souvent différents, c'est leur intersection, un préordre partiel, qui constituera le rangement le plus fiable.

Remarque : L'algorithme de classement est conçu pour exploiter une relation de surclassement floue. On verra en annexe 3 comment passer des cinq relations d'ELECTRE IV à une relation de surclassement floue permettant d'appliquer l'algorithme.

Pour établir ces préordres, on procède de la façon suivante :

- A partir de la matrice de surclassement floue (matrice des degrés de crédibilité notés $d(a, b)$), on construit une succession de relations de surclassement nettes. Pour cela, on utilise un ensemble de niveaux de coupe et un seuil de discrimination. A l'étape k , le surclassement $a S b$ ne sera pris en compte dans l'algorithme de classement que si $d(a, b) > \text{niveau de coupe à l'étape } k$ et $d(a, b) > d(b, a) + \text{seuil de discrimination}$.

- A partir de cette matrice de surclassement nette, on calcule, pour toute action a :
 - . la puissance de a : c'est le nombre d'actions que surclasse a ;
 - . la faiblesse de a : c'est le nombre d'actions qui surclassent a ;

. la qualification de a : (puissance de a) - (faiblesse de a).

La qualification de chaque action ainsi établie, on sélectionne la ou les meilleures actions en cas d'égalité (sélection descendante) ou la ou les plus mauvaises actions (sélection ascendante) que l'on extrait de l'ensemble des actions à classer.

Sur l'ensemble des actions restant à classer, on calcule à nouveau la qualification de chaque action pour extraire une ou plusieurs actions. On réitère l'opération tant que toutes les actions ne sont pas classées. Cette étape est appelée la distillation.

I.3.2 Les résultats - Remarques

A l'issue des distillations ascendante et descendante, on obtient deux préordres. Dans chacun d'eux, les actions sont regroupées au sein de classes d'équivalence ordonnées entre elles. Chaque classe contient au moins une action.

Il est à noter¹ que les résultats seront influencés par le seuil de discrimination et les niveaux de coupe choisis. Ces paramètres varient au cours du processus de sélection. Leur valeur initiale est fixée par programme mais l'utilisateur décide de la façon dont ils vont évoluer au cours de la distillation. Afin d'éviter toute utilisation intempestive de la fonction faisant varier les seuils, ce qui peut avoir pour résultat de rendre les classements obtenus en fin de distillation moins significatifs, le programme propose des valeurs standards que l'utilisateur peut, s'il le désire, modifier.

I.4 Construction du préordre intersection

I.4.1 Mode de construction

Le préordre intersection met en relief les comparaisons entre actions que la méthode a permis d'obtenir et souligne les incomparabilités éventuelles.

L'action a sera considérée meilleure que l'action b si, dans l'un au moins des classements, a est classée avant b et si, dans l'autre, a est au moins aussi bien classée que b.

L'action a sera jugée équivalente à b si les deux actions appartiennent à la même classe dans

¹ Ce paragraphe n'est pertinent que pour les jeux de données de type ELECTRE III ou "matrice de degrés de crédibilité".

chacun des deux préordres.

Les actions a et b seront incomparables si, par exemple, a est en meilleure position que b dans le classement ascendant et si b vient avant a à l'issue de la distillation descendante. (un exemple de préordre obtenu à partir des deux distillations est proposé à l'annexe 4)

I.4.2 Les résultats finaux

Après le déroulement des calculs, l'ensemble des informations issues de l'application de la méthode choisie (ELECTRE III ou ELECTRE IV) au jeu de données traité est contenu dans le **graphe** représentant le préordre partiel : toutes les actions sont rangées des meilleures aux plus mauvaises. Les arcs de transitivité ont été omis. Vis-à-vis de deux actions données a et b, quatre cas sont possibles : a est meilleure que b (en terme de graphe, il existe un chemin de a vers b), b est meilleure que a (il existe un chemin de b vers a), a et b sont équivalentes, a et b sont incomparables. L'ensemble du graphe est accessible par scrolling. La représentation du graphe a été optimisée de façon à minimiser le nombre de croisements.

S'il désire approfondir le déroulement de la méthode, l'utilisateur peut visualiser les résultats suivants :

a) Le résultat des deux distillations : deux listes contiguës des actions ordonnées par le rang qu'elles occupent dans chaque classement.

b) Le rang de chaque action dans le préordre final : cette option ne permet pas de restituer le préordre final ; elle masque les incomparabilités.

c) Le préordre médian : il s'agit d'un préordre complet construit à partir du préordre partiel, il peut être considéré comme une alternative possible pour les utilisateurs ne souhaitant pas prendre en compte les incomparabilités. Les actions sont rangées suivant les rangs du préordre final, deux actions d'un même rang et incomparables sont départagées suivant la différence de leurs positions.

d) La matrice du préordre final. Le jeu de symboles apparaissant dans cette matrice est choisi dans le menu Options. A l'intersection de la ligne correspondant à l'action a et de la colonne relative à l'action b, on aura :

- P ou > si l'action a est mieux classée que l'action b dans l'un des préordres et au moins aussi bien classée dans l'autre préordre ;
- I ou \equiv si a et b ont le même classement dans les deux préordres ;
- R ou ■ si a est mieux classée que b dans un des préordres et si on a l'inverse dans l'autre

préordre (incomparabilité) ;

- P- ou < si a est moins bien classée que b dans les deux préordres et au plus aussi bien classée que b dans l'autre.

1.5 Exemple de référence

Dans les différents chapitres de ce manuel, nous utiliserons toujours le même exemple de référence.

Il s'agit de classer 10 automobiles françaises évaluées sur 7 critères.

Liste des 10 automobiles et des codes utilisés dans le logiciel :

CITROEN BX 16 TZS	CBX16
PEUGEOT 205 GTI 1.9	P205G
PEUGEOT 405 MI16	P405M
PEUGEOT 605 SV 24	P605S
RENAULT 4 GTL CLAN	R4GTL
RENAULT CLIO 16S	RCLIO
RENAULT 21 TSE	R21TS
RENAULT 21 2L.TURBO	R21TU
RENAULT 25 BACCARA V6	R25BA
RENAULT ALPINE A610 TURBO	ALPIN

Liste des 7 critères et des codes utilisés dans le logiciel :

Prix en F	Prix
Vitesse maximum en km/h	Vmax
Consommation à 120 km/h en litres	C120
Volume du coffre en dm ³	Coff
0.100 km/h en secondes	Acce
Distance de freinage à 130 km/h	Frei
Niveau sonore en db	Bruï

Tableau des performances (actualisées en 1993)

	Prix	Vmax	C120	Coff	Acce	Frei	Bruï
CBX16	103000	171.3	7.65	352	11.6	88	69.7
P205G	101300	205.3	7.9	203	8.4	78.3	73.4
P405M	156400	221.7	7.9	391	8.4	81.5	69
P605S	267400	230.7	10.5	419	8.6	64.7	65.6
R4GTL	49900	122.6	8.3	120	23.7	74.1	76.4
RCLIO	103600	205.1	8.2	265	8.1	81.7	73.6
R21TS	103000	178	7.2	419	11.4	77.6	66.2
R21TU	170100	226	9.1	419	8.1	74.7	71.7
R25BA	279700	233.8	10.9	359	7.8	75.5	70.9
ALPIN	405000	265	10.3	265	6	74.7	72

Définition des pseudo-critères :

	Prix	Vmax	C120	Coff	Acce	Frei	Bruï
Sens préférences	Décroissant	Croissant	Décroissant	Croissant	Décroissant	Décroissant	Décroissant
Poids	0.3	0.1	0.3	0.2	0.1	0.2	0.1
Mode de définition	Inverse	Direct	Direct	Direct	Direct	Direct	Direct
Indifférence	0.08 / -2000	0.02 / 0	0 / 1	0 / 100	0.1 / -0.5	0 / 0	0 / 3
Préférence	0.13 / -3000	0.05 / 0	0 / 2	0 / 200	0.2 / -1	0 / 5	0 / 5
Veto	0.9 / 50000		0 / 4		0.5 / 3	0 / 15	0 / 15

L6 Menus et commandes accessibles dans le logiciel

Menu principal :

Fichier	Edition	Calculs	Résultats	Options	Fenêtre	Aide
---------	---------	---------	-----------	---------	---------	------

Menus verticaux :

Fichier
Nouveau Projet ...
Ouvrir Projet ...
Enregistrer
Enregistrer sous ...
Effacer projet ...
Importer fichier ASCII ...
Exporter vers ASCII ...
Imprimer ...
Config. impression ...
Quitter

Edition
Références du projet
Critères
Actions
Performances
Seuils
Matrice de crédibilité

Calculs
Exécution
Méthode ...
Informations
Statistiques

Résultats
Distillations
Rangs dans le préordre final
Préordre médian
Résultats supplémentaires ▾
Graphe

Matrice de concordance
Matrice des degrés de crédibilité
Matrice du préordre final

Options
Montrer la barre d'outils
Montrer la barre d'états
Résultats
Préférences
Sauver les Options

Fenêtre
Cascade
Mosaïque
Réorganiser les icônes
Tout fermer



ANNEXE 1 : LES SEUILS

1. Le concept de pseudo-critère

Les limites du modèle du vrai-critère :

Considérons un ensemble de critères j ($j=1, \dots, m$) destinés à modéliser les préférences d'un décideur. Chaque action est appréciée sur le critère j à partir de l'estimation des diverses conséquences qu'elle entraîne du point de vue de ce critère. La performance de l'action a sur le critère j sera notée $g_j(a)$.

Lorsque deux actions a et b sont évaluées sur le critère j , si le critère j est un vrai-critère, on a :

$a P_j b \Leftrightarrow g_j(a) > g_j(b)$: a est strictement préférée à b sur le critère j .

$a I_j b \Leftrightarrow g_j(a) = g_j(b)$: a est indifférente à b sur le critère j .

Or, dans bien des problèmes réels, les données sur lesquelles on se fonde pour évaluer chaque action sont entachées d'imprécision, d'incertitude ; de plus, on peut douter de la pertinence du mode de calcul retenu pour obtenir ces performances (critères qualitatifs particulièrement). Ces indéterminations ne peuvent pas être prises en compte lorsqu'on utilise des vrai-critères.

Le modèle du pseudo-critère permet d'intégrer explicitement les éléments mal définis ou connus avec une marge d'imprécision.

Nous supposons dans ce qui suit que la préférence est croissante avec les performances.

Soit j un pseudo-critère. Soit $u = g_j(b) - g_j(a)$.

Si $u = 0$, alors $a I_j^2 b$: a est indifférente à b .

Lorsque $g_j(b)$ croît, soit $q_j(g_j(a))$ la différence u à partir de laquelle a et b ne sont plus indifférentes. Cette fonction $q_j(g_j(a))$ est appelée seuil d'indifférence du critère j (cf. [ROY-1985], chapitre 9)).

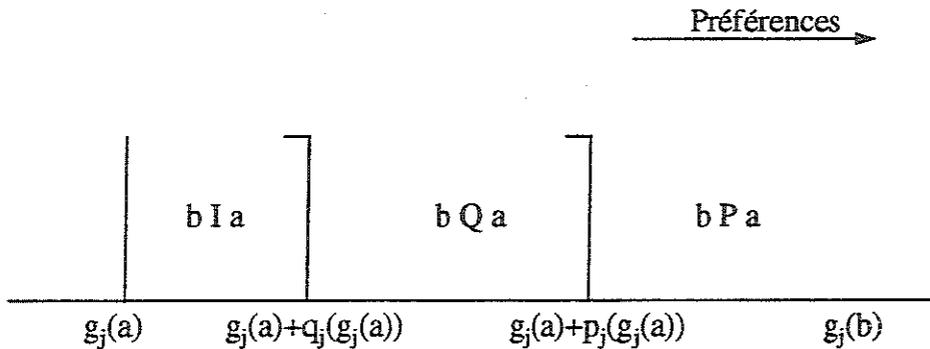
Lorsque la plage de variation du critère j est suffisamment étendue, il est également possible de

² Pour la définition des relations I , Q et P , on se reportera à [ROY-1985]. Dans la suite, nous omettrons de préciser que les relations I , Q et P ne concernent que le critère j considéré. Nous les noterons donc, sans risque de confusion, I , Q , P au lieu de I_j , Q_j , P_j .

trouver deux actions a et b telles que la différence $u = g_j(b) - g_j(a)$ soit suffisamment grande pour que l'on puisse affirmer que "b est strictement préférée à a" : $b P a$. Dans ce cas, si $g_j(a)$ est fixé, lorsque $g_j(b)$ décroît, u décroît. La relation $b P a$ ne sera acceptée que jusqu'à une certaine valeur $p_j(g_j(a))$ de u qu'on appellera **seuil de préférence stricte**.

De façon générale, mais pas nécessairement, on a $p_j(g_j(a)) \neq q_j(g_j(a))$ avec $p_j(g_j(a)) > q_j(g_j(a))$. Si $q_j(g_j(a)) < u \leq p_j(g_j(a))$, on peut hésiter entre la situation d'indifférence et de préférence stricte. On notera $b Q a$ cette situation intermédiaire que l'on interprétera comme "b est faiblement préférée à a".

On peut résumer les diverses situations par le schéma :



Pour éviter certaines incohérences (cf. [Roy-1985], chapitre 9), on postulera :

$$\frac{q_j(g_j(b)) - q_j(g_j(a))}{g_j(b) - g_j(a)} \geq -1 \quad \text{et} \quad \frac{p_j(g_j(b)) - p_j(g_j(a))}{g_j(b) - g_j(a)} \geq -1.$$

Avec un pseudo-critère, on a donc, pour $g_j(b) \geq g_j(a)$:

$$b I a \Leftrightarrow g_j(b) - g_j(a) \leq q_j[g_j(a)]$$

$$b Q a \Leftrightarrow q_j[g_j(a)] < g_j(b) - g_j(a) \leq p_j[g_j(a)]$$

$$b P a \Leftrightarrow g_j(b) - g_j(a) > p_j[g_j(a)]$$

En plus des seuils associés au pseudo-critère, ELECTRE III et ELECTRE IV mettent en jeu un seuil supplémentaire : le seuil de veto.

Soit $u = g_j(b) - g_j(a)$. Supposons que u soit non seulement assez grand pour que l'on ait $b P a$ mais également qu'il soit si grand que l'on puisse dire : "b est tellement meilleure que a sur le critère j qu'en aucun cas, globalement, a ne pourra être considérée meilleure que b quelles que soient les performances de a et b sur tous les autres critères".

On appellera seuil de veto du critère j (noté v_j) la différence u à partir de laquelle la proposition précédente est prise en compte dans l'élaboration de la préférence globale.

On appellera veto-préférence (notée PV_j) la relation associée au seuil de veto et on aura :

$$b PV_j a \text{ ssi } v_j [g_j(a)] < g_j(b) - g_j(a)$$

2. Les différents modes de calcul des seuils

Le calcul des seuils peut se faire dans quatre contextes différents. En effet :

- d'une part les préférences peuvent être croissantes ou décroissantes avec les performances ;
- d'autre part les seuils sont soit directs (i.e. calculés à partir de la performance de l'action la moins préférée), soit inverses (i.e. calculés à partir de la performance de la meilleure action).

On aura donc les quatre cas suivants :

- CAS 1 : les préférences vont croissant avec les performances ; les seuils sont directs ;
- CAS 2 : les préférences vont décroissant avec les performances ; les seuils sont directs ;
- CAS 3 : les préférences vont croissant avec les performances ; les seuils sont inverses ;
- CAS 4 : les préférences vont décroissant avec les performances ; les seuils sont inverses.

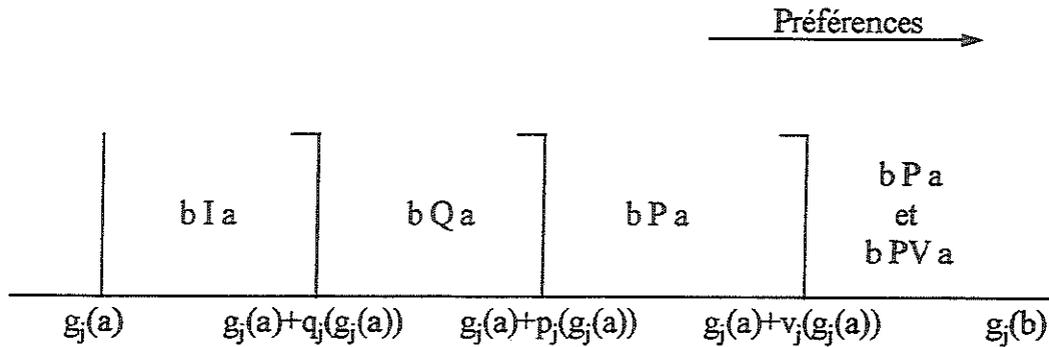
Dans le logiciel ELECTRE III-IV, les seuils seront considérés comme des fonctions affines des performances et seront donc calculés ainsi :

$$\text{seuil}(g_j(a)) = \alpha \times g_j(a) + \beta$$

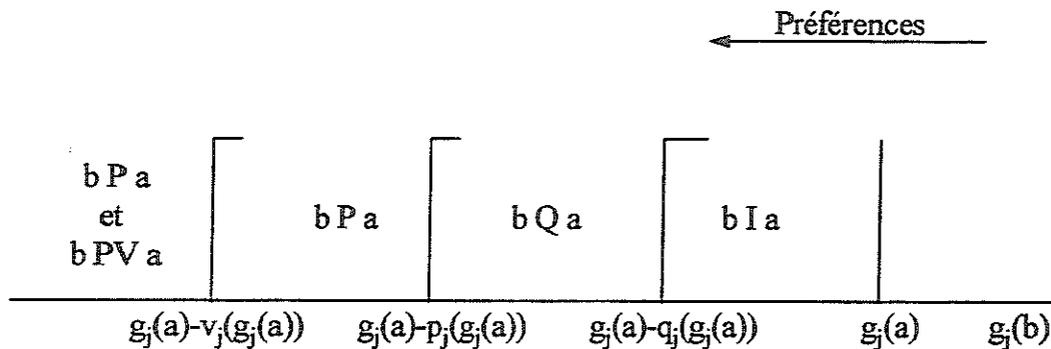
C'est à l'utilisateur de préciser, par critère et pour chaque type de seuil, la valeur des coefficients α et β . La condition de cohérence rappelée plus haut entraîne que le coefficient α doit être supérieur ou égal à -1 dans le cas où les préférences sont croissantes et le calcul des seuils est direct (CAS 1). On montre que le coefficient α doit être inférieur à 1 dans les CAS 2 et 3 et supérieur à -1 dans le CAS 4. Les valeurs attribuées à α et à β ne doivent en aucun cas rendre une valeur d'un seuil négatif. De plus, sur toute l'étendue de l'échelle, le seuil d'indifférence doit rester inférieur au seuil de préférence lui-même inférieur au seuil de veto, s'il existe.

On a pour les différents cas :

CAS 1 :



CAS 2 :



Pour le cas 3 et le cas 4, les seuils sont inverses. Le programme transforme automatiquement les seuils inverses en seuils directs. Cela permet, du point de vue informatique, de recourir au même algorithme de comparaison par paires quel que soit le type de seuil. Ainsi, le CAS 3 se ramène au CAS 1 et le CAS 4 au CAS 2. Dans ce qui suit, on notera :

- q, p et v les seuils d'indifférence, de préférence stricte et de veto calculés de façon directe ;
- q', p' et v' les seuils d'indifférence, de préférence stricte et de veto calculés de façon inverse ;
- $\alpha'_q, \beta'_q ; \alpha'_p, \beta'_p ; \alpha'_v, \beta'_v$ les coefficients de la fonction affine utilisée pour calculer q', p' et v' .
- $\alpha_q, \beta_q ; \alpha_p, \beta_p ; \alpha_v, \beta_v$ les coefficients de la fonction affine employée pour calculer q, p et v .

Étude des transformations des coefficients des seuils inverses dans le but d'obtenir des seuils directs.

Pour illustrer le calcul des coefficients associés aux seuils directs en fonction des coefficients associés aux seuils inverses, nous utiliserons le seuil de préférence stricte. La démonstration repose sur le principe de préservation des situations préférentielles lors de la transformation des seuils inverses en seuils directs ; elle reste valable si on emploie le seuil d'indifférence ou de veto.

- Pour le CAS 3

Considérons deux actions a et b telles que $b \succ a$ avec

$$g_j(b) - g_j(a) = p_j[g_j(a)] = \alpha_p * g_j(a) + \beta_p \quad (1)$$

Il faut alors que :

$$g_j(b) - g_j(a) = p'_j[g_j(b)] = \alpha'_p * g_j(b) + \beta'_p \quad (2)$$

d'où

$$p_j[g_j(a)] = p'_j[g_j(b)]$$

ou encore :

$$\alpha_p * g_j(a) + \beta_p = \alpha'_p * g_j(b) + \beta'_p \quad (3)$$

Par ailleurs : (1) $\Rightarrow g_j(b) = g_j(a) + p_j[g_j(a)]$

Donc (3) devient :

$$\begin{aligned} \alpha_p * g_j(a) + \beta_p &= \alpha'_p * [g_j(a) + p_j[g_j(a)]] + \beta'_p \\ &= \alpha'_p * g_j(a) + \alpha'_p \alpha_p * g_j(a) + \alpha'_p \beta_p + \beta'_p \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_p(1 - \alpha'_p) * g_j(a) + \beta_p(1 - \alpha'_p) = \alpha'_p * g_j(a) + \beta'_p$$

Cette égalité doit être vérifiée quel que soit $g_j(a)$, donc :

$$\alpha_p(1 - \alpha'_p) = \alpha'_p \Rightarrow \alpha_p = \frac{\alpha'_p}{1 - \alpha'_p}$$

et

$$\beta_p(1 - \alpha'_p) = \beta'_p \Rightarrow \beta_p = \frac{\beta'_p}{1 - \alpha'_p}$$

De la même façon, on obtient, pour les coefficients du seuil d'indifférence et du seuil de veto :

$$\alpha_q = \frac{\alpha'_q}{1-\alpha'_q} ; \beta_q = \frac{\beta'_q}{1-\alpha'_q}$$

et

$$\alpha_v = \frac{\alpha'_v}{1-\alpha'_v} ; \beta_v = \frac{\beta'_v}{1-\alpha'_v}$$

- Pour le CAS 4

Comme pour le CAS 3, considérons deux actions a et b telles que b Q a avec :

$$g_j(a) - g_j(b) = p'_j[g_j(b)] = \alpha'_p * g_j(b) + \beta'_p$$

Il faut alors que :

$$g_j(a) - g_j(b) = p_j[g_j(a)] = \alpha_p * g_j(a) + \beta_p$$

On démontre aisément que :

$$\alpha_p = \frac{\alpha'_p}{1+\alpha'_p} ; \beta_p = \frac{\beta'_p}{1+\alpha'_p}$$

De la même façon, on obtient, pour les coefficients du seuil d'indifférence et du seuil de veto :

$$\alpha_q = \frac{\alpha'_q}{1+\alpha'_q} ; \beta_q = \frac{\beta'_q}{1+\alpha'_q}$$

et

$$\alpha_v = \frac{\alpha'_v}{1+\alpha'_v} ; \beta_v = \frac{\beta'_v}{1+\alpha'_v}$$

ANNEXE 2 : ELECTRE III

CONSTRUCTION DE LA RELATION DE SURCLASSEMENT FLOUE PAR LE CALCUL DES INDICES DE CONCORDANCE ET DE DISCORDANCE

1. Objectif et nature des données

Objectif

En vue de classer les actions entre elles, l'objectif premier est de calculer un indicateur qui sera appelé degré de crédibilité. Il exprimera, pour toute paire d'actions (a,b), quel est le degré de crédibilité que l'on peut accorder à la proposition "a est au moins aussi bonne que b".

Nature des données

Soit A un ensemble de n actions. Soit F une famille cohérente de m critères. $F = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$.

Chaque action $a \in A$ est évaluée sur l'ensemble des critères. On associe donc à $a \in A$ un vecteur de performances $g(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_m(a))$. De plus, ces performances sont obtenues avec une plus ou moins grande précision. Il ne s'agit donc pas de vrai-critères mais de pseudo-critères (voir définition en ANNEXE 1).

Soit q_j et p_j respectivement les seuils d'indifférence et de préférence stricte associés au pseudo-critère j. Supposons que pour le critère j, les préférences sont croissantes avec les performances. Soit une paire d'actions (a,b) telle que $g_j(b) \geq g_j(a)$; si les seuils sont calculés dans le sens direct (i.e. à partir de la valeur la moins préférée), alors la préférence partielle suivant le pseudo-critère j s'exprime de la façon suivante :

Si $g_j(b) - g_j(a) > p_j[g_j(a)]$: b est préférée à a sur le critère j.

$q_j[g_j(a)] < g_j(b) - g_j(a) \leq p_j[g_j(a)]$: b est faiblement préférée à a sur le critère j.

$0 \leq g_j(b) - g_j(a) \leq q_j[g_j(a)]$: b est indifférente à a sur le critère j.

Enfin, on dote la famille de critères F d'une pondération : $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ qui exprime l'importance relative des différents pseudo-critères.

EXEMPLE DE RÉFÉRENCE :

Nous nous appuyerons pour une meilleure compréhension des algorithmes qui vont être détaillés ci-après sur l'exemple qui a été présenté au chapitre I.

Il s'agit de classer 10 voitures évaluées sur 7 pseudo-critères. Pour un rappel du nom des actions et des critères, vous voudrez consulter le Chapitre I. Nous présentons ci-dessous un rappel des performances des 10 actions et les paramètres caractérisant les 7 pseudo-critères.

		Prix	Vmax	C120	Coff	Acce	Fret	Bruit
1	CBX16	103000	171.3	7.65	352	11.6	88	69.7
2	P205G	101300	205.3	7.9	203	8.4	78.3	73.4
3	P405M	156400	221.7	7.9	391	8.4	81.5	69
4	P605S	267400	230.7	10.5	419	8.6	64.7	65.6
5	R4GTL	49900	122.6	8.3	120	23.7	74.1	76.4
6	RCLIO	103600	205.1	8.2	265	8.1	81.7	73.6
7	R21TS	103000	178	7.2	419	11.4	77.6	66.2
8	R21TU	170100	226	9.1	419	8.1	74.7	71.7
9	R25BA	279700	233.8	10.9	359	7.8	75.5	70.9
10	ALPIN	405000	265	10.3	265	6	74.7	72

	1: Prix	2: Vmax	3: C120	4: Coff	5: Acce	6: Fret	7: Bruit
Sens préférences	Décroissant	Croissant	Décroissant	Croissant	Décroissant	Décroissant	Décroissant
Poids	0.3	0.1	0.3	0.2	0.1	0.2	0.1
Mode de définition	Inverse	Direct	Direct	Direct	Direct	Direct	Direct
Indifférence	0.08 / -2000	0.02 / 0	0 / 1	0 / 100	0.1 / -0.5	0 / 0	0 / 3
Préférence	0.13 / -3000	0.05 / 0	0 / 2	0 / 200	0.2 / -1	0 / 5	0 / 5
Veto	0.9 / 50000		0 / 4		0.5 / 3	0 / 15	0 / 15

Dans ce tableau, la ligne Mode de définition indique le mode de calcul des seuils (Direct = par rapport à la plus mauvaise des deux actions ; Inverse = par rapport à la meilleure des deux actions - pour plus de détails, consultez l'annexe 1). Chacune des lignes concernant les seuils (Indifférence, Préférence, Veto) affiche les coefficients α_j / β_j , α_j et β_j étant les coefficients de la fonction affine permettant de calculer les seuils (seuil ($g_j(a)$) = $\alpha_j * g_j(a) + \beta_j$). Des calculs effectifs de seuils vont être exposés dans la suite de ce chapitre.

2. Calcul de l'indice de concordance associé à chaque pseudo-critère

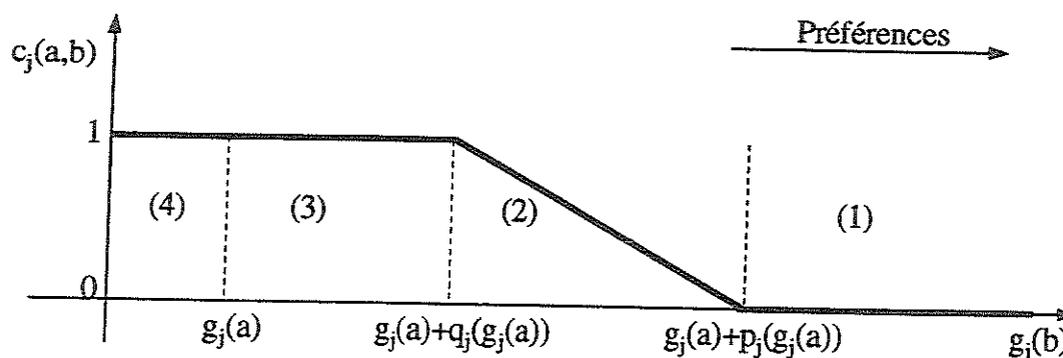
Soit une paire d'actions (a,b) ; on recherche la valeur $c_j(a,b)$ qui exprime dans quelle mesure on peut affirmer que, sur le critère j, "a est au moins aussi bonne que b".

Les variations de $c_j(a,b)$ peuvent être appréciées dans quatre contextes différents :

- pour le critère j , les préférences vont croissant avec les performances et les seuils sont directs (CAS 1) ou inverses (CAS 3) ;
- pour le critère j , les préférences vont décroissant avec les performances et les seuils sont directs (CAS 2) ou inverses (CAS 4).

CAS 1 : (préférences croissantes et seuils directs)

Pour $g_j(a)$ fixé, la figure ci-dessous représente les variations de $c_j(a,b)$ en fonction des variations de $g_j(b)$. Les seuils sont directs, donc calculés à partir de la valeur la moins préférée.



Autrement dit, si $g_j(b)$ se situe dans l'intervalle :

$$(1): g_j(b) > g_j(a) + p_j[g_j(a)] \Rightarrow c_j(a,b) = 0 \quad (\text{Remarque : } c_j(b,a) = 1)$$

b est strictement préférée à a sur le critère j

$$(2): g_j(a) + q_j[g_j(a)] < g_j(b) \leq g_j(a) + p_j[g_j(a)] \Rightarrow 0 < c_j(a,b) \leq 1 \quad (\text{Remarque : } c_j(b,a) = 1)$$

b est faiblement préférée à a sur le critère j

$$(3): g_j(a) \leq g_j(b) \leq g_j(a) + q_j[g_j(a)] \Rightarrow c_j(a,b) = 1 \quad (\text{Remarque : } c_j(b,a) = 1)$$

b et a sont indifférentes sur le critère j

$$(4): g_j(b) \leq g_j(a) \Rightarrow c_j(a,b) = 1$$

Remarque : Dans la zone (4), la valeur de $c_j(b,a)$ dépend de la comparaison entre l'écart des performances $g_j(a) - g_j(b)$ avec $q_j[g_j(b)]$ d'une part et $p_j[g_j(b)]$ d'autre part.

$$g_j(a) - q_j[g_j(b)] \leq g_j(b) \Rightarrow c_j(b,a) = 1 \quad (\text{b et a sont indifférentes sur le critère j})$$

$g_j(a) - p_j[g_j(b)] \leq g_j(b) < g_j(a) - q_j[g_j(b)] \Rightarrow 0 < c_j(b,a) \leq 1$ (a est faiblement préférée à b sur le critère j)

$g_j(b) < g_j(a) - p_j[g_j(b)] \Rightarrow c_j(b,a) = 0$ (a est strictement préférée à b sur le critère j)

Remarques :

Lorsque $g_j(b)$ se trouve dans l'intervalle (2), on a : $c_j(b,a) = 1$ tandis que $c_j(a,b)$ est obtenu par interpolation linéaire :

$$c_j(a,b) = \frac{p_j[g_j(a)] - [g_j(b) - g_j(a)]}{p_j[g_j(a)] - q_j[g_j(a)]}$$

La formule générale du calcul de l'indice de concordance $c_j(b,a)$ est, par conséquent :

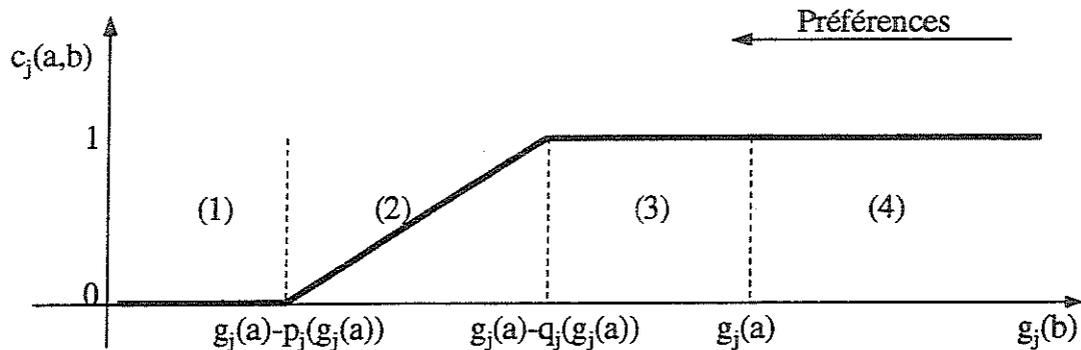
$$c_j(a,b) = \frac{p_j[g_j(a)] - \min [g_j(b) - g_j(a), p_j[g_j(a)]]}{p_j[g_j(a)] - \min [g_j(b) - g_j(a), q_j[g_j(a)]]}$$

CAS 2 : (Préférences décroissantes et seuils directs)

Les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont directs (par exemple pour le critère consommation). Ils seront donc calculés à partir de la performance la plus importante, (i.e. l'action la moins préférée). On a, alors :

$$c_j(a,b) = \frac{p_j[g_j(a)] - \min [g_j(a) - g_j(b), p_j[g_j(a)]]}{p_j[g_j(a)] - \min [g_j(a) - g_j(b), q_j[g_j(a)]]}$$

Soit graphiquement :



Si $g_j(b)$ est dans l'intervalle

(1), alors $g_j(a) - g_j(b) > p_j[g_j(a)]$:

b est strictement préférée à a sur le critère j et $c_j(a,b) = 0$;

(2), alors $q_j[g_j(a)] < g_j(a) - g_j(b) \leq p_j[g_j(a)]$:

b est faiblement préférée à a sur le critère j et $0 < c_j(a,b) \leq 1$;

(3), alors $g_j(a) - g_j(b) \leq q_j[g_j(b)]$:

b et a sont indifférentes sur le critère j et $c_j(a,b) = 1$.

(4), alors $g_j(a) \leq g_j(b)$:

a est soit indifférente, soit faiblement préférée, soit strictement préférée à b : dans tous les cas, a possède une meilleure performance que b et $c_j(a,b) = 1$

Remarque : Lorsque $c_j(a,b)$ est obtenu par interpolation (dans la zone 2), on a :

$$c_j(a,b) = \frac{p_j[g_j(a)] - [g_j(a) - g_j(b)]}{p_j[g_j(a)] - q_j[g_j(a)]}$$

Pour les CAS 3 et 4, les seuils sont inverses ; le programme les transforme automatiquement en seuils directs (cf. ANNEXE 1) et, ainsi, le CAS 3 se ramène au CAS 1 et le CAS 4 au CAS 2.

APPLICATION A L'EXEMPLE DE RÉFÉRENCE

Dans tout ce qui suit, les actions et les critères sont désignés par leur numéro.

- Exemple 1

Calculons $c_4(2,1)$, $c_4(2,6)$ et $c_4(2,7)$.

Rappelons que $c_4(2,1)$ exprime dans quelle mesure, sur le critère 4, l'action 2 est au moins aussi bonne que l'action 1.

On a :

	Coff
Action n°1 CBX16	352
Action n°2 P205G	203
Action n°6 RCLIO	265
Action n°7 R21TS	419

Pour le critère 4, les préférences vont croissant avec les performances et les seuils sont constants.

$$q_4(203) = 100$$

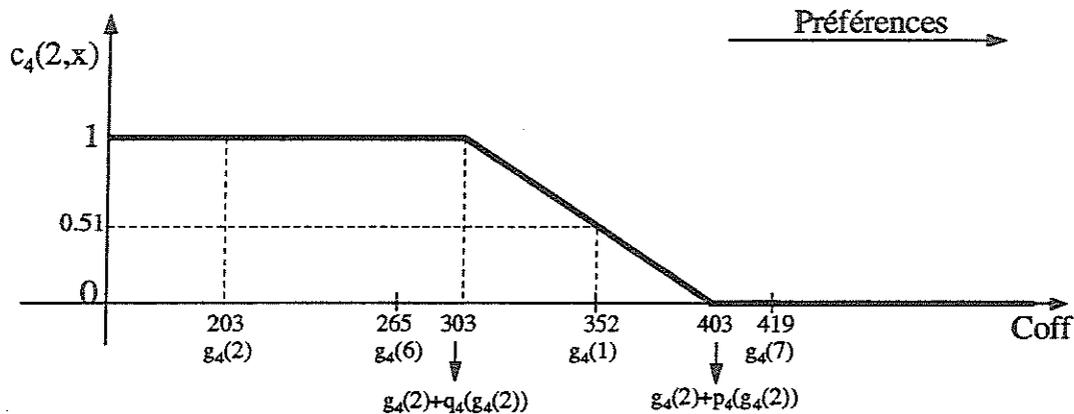
$$p_4(203) = 200$$

On calcule donc :

$$g_4(2) + q_4[g_4(2)] = 203 + 100 = 303$$

$$g_4(2) + p_4[g_4(2)] = 203 + 200 = 403$$

Observons l'évolution de $c_4(2,x)$ pour $g_4(x) \geq g_4(2)$:



On obtient $c_4(2,6) = 1$, $c_4(2,7) = 0$

et $c_4(2,1)$ est obtenu par interpolation linéaire,

$$c_4(2,1) = \frac{p_4[g_4(2)] - [g_4(1) - g_4(2)]}{p_4[g_4(2)] - q_4[g_4(2)]} = \frac{200 - (352 - 203)}{200 - 100} = \frac{51}{100} = 0.51$$

Remarque : Si on veut obtenir $c_4(2,5)$

	Coff
Action n°2 P205G	203
Action n°5 R4GTL	120

Dans ce cas, $g_4(5) \leq g_4(2)$ donc $c_4(2,5) = 1$

- Exemple 2

Calculons $c_2(3,4)$, $c_2(3,5)$ et $c_2(3,9)$.

		Vmax
Action n°3	P405M	221.7
Action n°4	P605S	230.7
Action n°5	R4GTL	122.6
Action n°9	R25BA	233.8

Pour le critère 2, les performances vont croissant avec les préférences et les seuils calculés sont directs. On voit immédiatement que l'action 3 est meilleure que l'action 5 sur ce critère, donc $c_2(3,5) = 1$. Il reste à comparer l'action 4 et l'action 9 à l'action 3. Les seuils étant directs, on calcule :

$$q_2(221.7) = 0.02 * 221.7 = 4.434$$

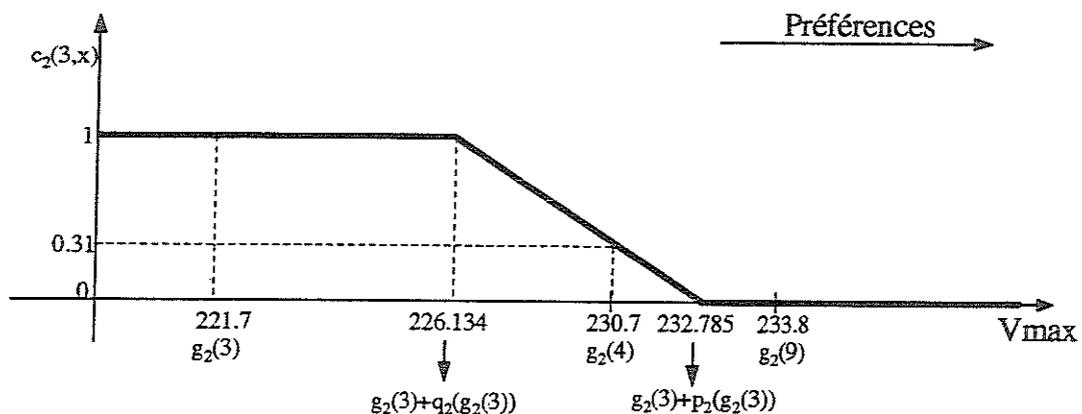
$$p_2(221.7) = 0.05 * 221.7 = 11.085,$$

d'où

$$g_2(3) + q_2[g_2(3)] = 221.7 + 4.434 = 226.134,$$

$$g_2(3) + p_2[g_2(3)] = 221.7 + 11.085 = 232.785.$$

Etudions les variations de $c_2(3,x)$ pour x meilleur que 3 sur le critère 2.



On obtient $c_2(3,9) = 0$

Par interpolation, on obtient :

$$c_2(3,4) = \frac{232.785 - 230.7}{11.085 - 4.434} = \frac{2.085}{6.651} = 0.31$$

- *Exemple 3 :*

Calculons $c_6(6,1)$, $c_6(6,2)$, $c_6(6,7)$ et $c_6(6,8)$.

Pour le critère 6 (distance de freinage à 130 km/h), les préférences décroissent avec les performances et les seuils sont constants.

		Frein
Action n°1	CBX16	88
Action n°2	P205G	78.3
Action n°6	RCLIO	81.7
Action n°7	R21TS	77.6
Action n°8	R21TU	74.7

Les seuils sont constants :

$$q_6(81.7) = 0$$

$$p_6(81.7) = 5$$

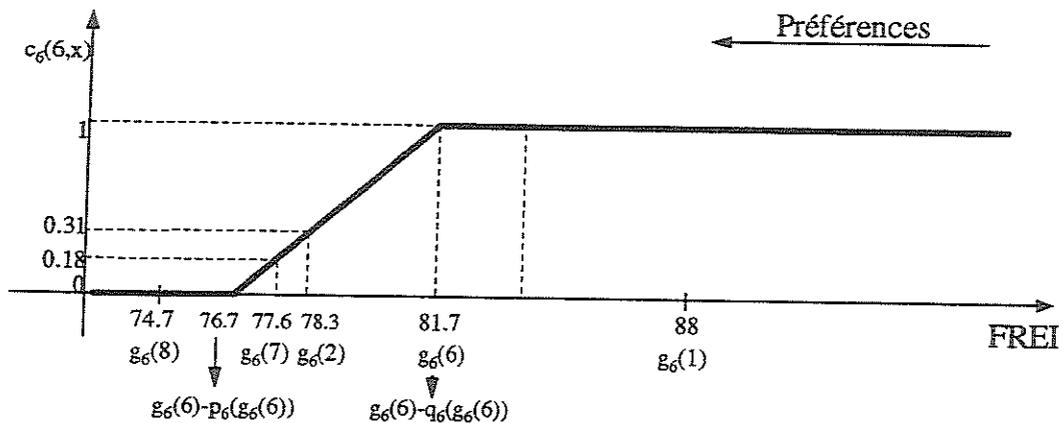
d'où

$$g_6(6) - q_6[g_6(6)] = 81.7,$$

$$g_6(6) - p_6[g_6(6)] = 81.7 - 5 = 76.7$$

L'action 6 a une meilleure performance que l'action 1 donc $c_6(6,1) = 1$

Etudions les variations de $c_6(6,x)$ pour x meilleur que 6 sur le critère 6.



On obtient $c_6(6,8) = 0$

Par interpolation, on obtient :

$$c_6(6,2) = \frac{78.3 - 76.7}{5 - 0} = \frac{1.6}{5} = 0.32$$

$$c_6(6,7) = \frac{77.6 - 76.7}{5 - 0} = \frac{0.9}{5} = 0.18$$

- Exemple 4 :

Calculons $c_1(8,3)$.

	Prix
Action n°3 P405M	156400
Action n° 8 R21TU	170100

Sur le critère 1 (Prix), les préférences décroissent avec les performances et les seuils sont inverses. Le logiciel les transforme automatiquement en seuils directs (cf. ANNEXE 1).

On connaît les coefficients α' et β' des seuils inverses. Calculons les coefficients α et β des seuils directs.

Pour le seuil d'indifférence q , on a, lorsque les préférences sont décroissantes avec les performances :

$$\alpha_q = \frac{\alpha'_q}{1 + \alpha'_q} = \frac{0.08}{1 + 0.08} = 0.074$$

$$\beta_q = \frac{\beta'_q}{1 + \alpha'_q} = \frac{-2000}{1 + 0.08} = -1851.85$$

et, pour le seuil de préférence :

$$\alpha_p = \frac{\alpha'_p}{1 + \alpha'_p} = \frac{0.13}{1 + 0.13} = 0.115$$

$$\beta_p = \frac{\beta'_p}{1 + \alpha'_p} = \frac{-3000}{1 + 0.13} = -2654.867$$

On obtient :

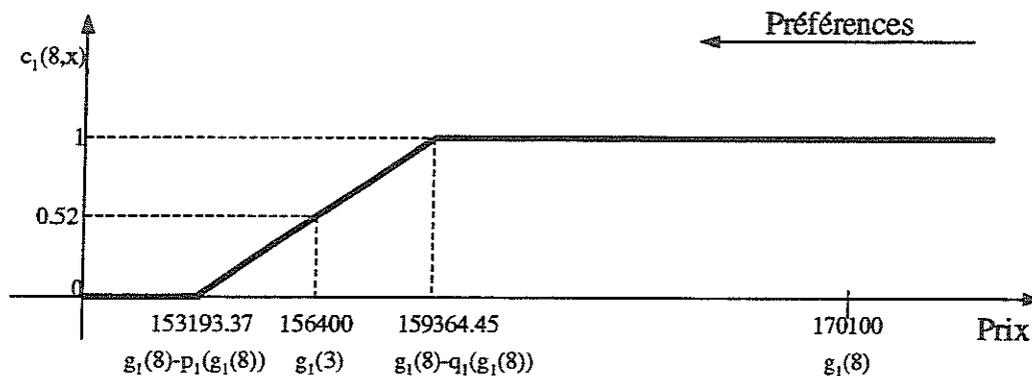
$$q_1[g_1(8)] = \alpha_q * g_1(8) + \beta_q = 0.074 * 170100 - 1851.85 = 10735.55$$

$$g_1(8) - q_1[g_1(8)] = 170100 - 10735.55 = 159364.45$$

$$p_1[g_1(8)] = \alpha_p * g_1(8) + \beta_p = 0.115 * 170100 - 2654.867 = 16906.63$$

$$g_1(8) - p_1[g_1(8)] = 170100 - 16906.63 = 153193.37$$

Observons l'évolution de $c_1(8,x)$ pour x meilleur que 8 (donc moins cher).



On est ramené au CAS 2.

On a pour l'interpolation :

$$c_1(8,3) = \frac{156400 - 153193.37}{16906.63 - 10735.55} = \frac{3207}{6171.08} = 0.52$$

De cette façon, on obtient un indice de concordance $c_j(a,b)$ relatif au critère j pour toute paire d'actions (a,b) ; a et $b \in A$, ce qui donne les matrices de concordance pour les critères Prix,

coff	1 CBX16	2 P205G	3 P405M	4 P605S	5 R4GTL	6 RCLIO	7 R21TS	8 R21TU	9 R25BA	10 ALPIN
1:CBX16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2:P205G	0.51	1	0.12	0	1	1	0	0	0.44	1
3:P405M	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4:P605S	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5:R4GTL	0	1	0	0	1	0.55	0	0	0	0.55
6:RCLIO	1	1	0.74	0.46	1	1	0.46	0.46	1	1
7:R21TS	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8:R21TU	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9:R25BA	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10:ALPIN	1	1	0.74	0.46	1	1	0.46	0.46	1	1

frei	1 CBX16	2 P205G	3 P405M	4 P605S	5 R4GTL	6 RCLIO	7 R21TS	8 R21TU	9 R25BA	10 ALPIN
1:CBX16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2:P205G	1	1	1	0	0.16	1	0.86	0.28	0.44	0.28
3:P405M	1	0.36	1	0	0	1	0.22	0	0	0
4:P605S	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5:R4GTL	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
6:RCLIO	1	0.32	0.96	0	0	1	0.18	0	0	0
7:R21TS	1	1	1	0	0.30	1	1	0.42	0.58	0.42
8:R21TU	1	1	1	0	0.88	1	1	1	1	1
9:R25BA	1	1	1	0	0.72	1	1	0.84	1	0.84
10:ALPIN	1	1	1	0	0.88	1	1	1	1	1

3. Agrégation des préférences partielles en une relation binaire floue unique

A partir des indices de concordance par critère, on construit la matrice de concordance globale en tenant compte de l'importance relative de chaque critère :

$$C(a, b) = \frac{\sum_{j=1}^m k_j * c_j(a, b)}{\sum_{j=1}^m k_j}$$

C(a,b) exprime dans quelle mesure les performances de a et de b sur tous les critères sont en

concordance avec la proposition "a surclasse b".

Par exemple :

$$c(9,8) = \frac{(0.3*0) + (0.1*1) + (0.3*0.2) + (0.2*1) + (0.1*1) + (0.2*0.84) + (0.1*1)}{0.3+0.1+0.3+0.2+0.1+0.2+0.1} = \frac{0.728}{1.3} = 0.56$$

$$c(1,4) = \frac{(0.3*1) + (0.1*0) + (0.3*1) + (0.2*1) + (0.1*0) + (0.2*0) + (0.1*0.45)}{0.3+0.1+0.3+0.2+0.1+0.2+0.1} = \frac{0.845}{1.3} = 0.65$$

$$c(3,8) = \frac{(0.3*1) + (0.1*1) + (0.3*1) + (0.2*1) + (0.1*1) + (0.2*0) + (0.1*1)}{0.3+0.1+0.3+0.2+0.1+0.2+0.1} = \frac{1.1}{1.3} = 0.846$$

On obtient ainsi la matrice de concordance suivante :

C(a,b)	1 CBX16	2 P205G	3 P405M	4 P605S	5 R4GTL	6 RCLIO	7 R21TS	8 R21TU	9 R25BA	10 ALPIN
1:CBX16	1	0.69	0.69	0.65	0.62	0.69	0.78	0.69	0.69	0.69
2:P205G	0.9	1	0.73	0.54	0.64	1	0.75	0.66	0.69	0.74
3:P405M	0.77	0.67	1	0.78	0.62	0.77	0.65	0.85	0.71	0.69
4:P605S	0.54	0.54	0.54	1	0.54	0.51	0.54	0.65	0.92	0.85
5:R4GTL	0.62	0.85	0.62	0.46	1	0.78	0.59	0.63	0.62	0.72
6:RCLIO	0.97	0.9	0.82	0.61	0.62	1	0.71	0.69	0.77	0.69
7:R21TS	1	0.85	0.85	0.69	0.66	0.85	1	0.76	0.78	0.76
8:R21TU	0.67	0.72	0.84	0.77	0.75	0.77	0.48	1	0.96	0.85
9:R25BA	0.54	0.54	0.54	0.77	0.5	0.54	0.47	0.56	1	0.82
10:ALPIN	0.54	0.54	0.5	0.46	0.52	0.54	0.38	0.64	0.77	1

4. Calcul des indices de discordance

La relation de concordance ainsi définie doit être affaiblie par la notion de discordance. En effet, même si tous les critères sauf un, j_0 , concordent avec l'assertion "a est au moins aussi bonne que b", il se peut que l'écart $g_{j_0}(b) - g_{j_0}(a)$ soit si grand qu'il devienne impossible de ne pas en tenir compte.

A cet effet, il est nécessaire de calculer, pour chaque paire d'actions (a,b), un ensemble d'indices : $\{D_j(a,b), j = 1, \dots, m\}$.

Chaque valeur $D_j(a,b)$ exprime dans quelle mesure le critère j réfute l'assertion "a est au moins aussi bonne que b".

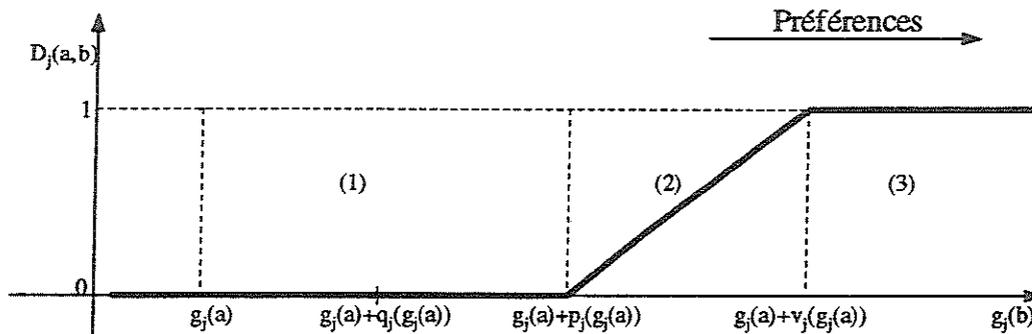
Le calcul des D_j fait intervenir un seuil de veto par critère. La définition et le mode de calcul de ce seuil ont été présentés en ANNEXE I.

CAS 1 (Calcul des indices de discordance - Préférences croissantes et seuils directs)

$D_j(a,b)$ s'exprime de façon générale par la formule suivante :

$$D_j(a,b) = \text{Min} \left[1; \text{Max} \left[0; \frac{g_j(b) - g_j(a) - p_j[g_j(a)]}{v_j[g_j(a)] - p_j[g_j(a)]} \right] \right]$$

soit graphiquement :



On voit que, si $g_j(b)$ est dans l'intervalle :

- (1), on a : $g_j(b) - g_j(a) \leq p_j[g_j(a)]$ et $D_j(a,b) = 0$: les performances de a et b sur le critère j n'entrent pas en contradiction avec l'affirmation "a surclasse b".
- (2), alors $p_j[g_j(a)] < g_j(b) - g_j(a) < v_j[g_j(a)]$ et $0 < D_j(a,b) < 1$: les performances $g_j(a)$ et $g_j(b)$ entrent faiblement en contradiction avec l'affirmation "a surclasse b".

$D_j(a,b)$ est obtenu par interpolation ; on a alors :
$$D_j(a,b) = \frac{g_j(b) - g_j(a) - p_j[g_j(a)]}{v_j[g_j(a)] - p_j[g_j(a)]}$$

- (3), alors $g_j(b) - g_j(a) \leq v_j[g_j(a)]$ et $D_j(a,b) = 1$: les performances $g_j(a)$ et $g_j(b)$ interdisent

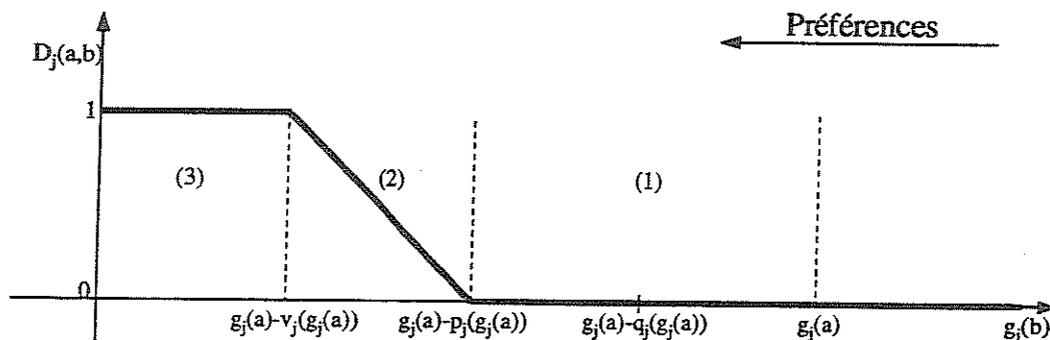
tout surclassement de b par a quelles que soient les performances de a et b sur tous les autres pseudo-critères.

CAS 2 (Calcul des indices de discordance - Préférences décroissantes et seuils directs)

On a, pour la cas 2 :

$$D_j(a, b) = \text{Min} \left[1; \text{Max} \left[0; \frac{g_j(a) - p_j[g_j(a)] - g_j(b)}{v_j[g_j(a)] - p_j[g_j(a)]} \right] \right]$$

soit graphiquement :



Si $g_j(b)$ est dans l'intervalle

(1), alors $g_j(a) - g_j(b) \leq p_j[g_j(a)]$ et $D_j(a, b) = 0$;

(2), alors $p_j[g_j(a)] < g_j(a) - g_j(b) < v_j[g_j(a)]$ et $0 < D_j(a, b) < 1$:

$$D_j(a, b) = \frac{g_j(a) - p_j[g_j(a)] - g_j(b)}{v_j[g_j(a)] - p_j[g_j(a)]}$$

(3), alors $g_j(a) - g_j(b) \leq v_j[g_j(a)]$ et $D_j(a, b) = 1$.

CAS 3 (Calcul des indices de discordance - Préférences croissantes et seuils inverses)

Lorsque l'on est dans le CAS 3, le programme se ramène au CAS 1 en opérant les transformations suivantes : soit α'_v et β'_v les coefficients du seuil de veto introduits par l'utilisateur et correspondant au seuil inverse.

On a (cf. ANNEXE I) :

$$\alpha_v = \frac{\alpha'_v}{1-\alpha'_v} ; \beta_v = \frac{\beta'_v}{1-\alpha'_v}$$

CAS 4 (Calcul des indices de discordance - Préférences décroissantes et seuils inverses)

De la même façon, à partir du CAS 4, le programme se replace dans le contexte du CAS 2.

On a :

$$\alpha_v = \frac{\alpha'_v}{1+\alpha'_v} ; \beta_v = \frac{\beta'_v}{1+\alpha'_v}$$

EXEMPLE DE RÉFÉRENCE

Dans l'exemple de référence, des seuils de veto ont été définis pour les critères Prix, C120, Acce, Frei, Brui. Seuls ces critères peuvent fournir des indices de discordance non nuls.

- *Exemple 1 :*

Calculons $D_6(1,4)$ et $D_6(1,7)$. On a :

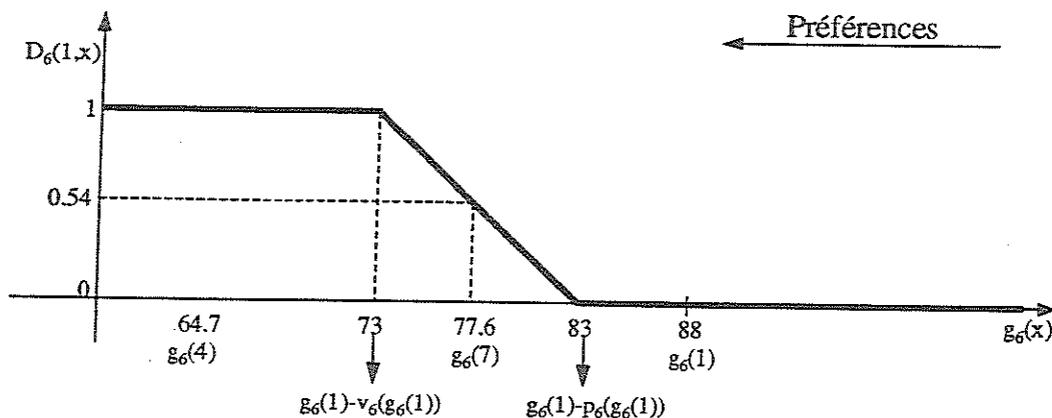
	Frein
Action n°1 CBX16	88
Action n°4 P605S	64.7
Action n°7 R21TS	77.6

Pour le critère Frei, les préférences vont décroissant avec les performances et les seuils sont constants.

$$p_6[g_6(1)] = 5$$

$$v_6[g_6(1)] = 15$$

Observons les variations de $D_6(1,x)$ pour x meilleur que 1 :



Donc,

$$D_6(1,4) = 1 \text{ car } g_6(1) - g_6(4) \geq v_6[g_6(1)]$$

$D_6(1,7)$ est obtenu par interpolation linéaire :

$$D_6(1,7) = \frac{g_6(1) - p_6[g_6(1)] - g_6(7)}{v_6[g_6(1)] - p_6[g_6(1)]} = \frac{83 - 77.6}{15 - 5} = \frac{5.4}{10} = 0.54$$

- Exemple 2 :

Calculons $D_1(9,1)$, $D_1(9,4)$ et $D_1(9,8)$:

Pour le critère PRIX, les préférences vont décroissant avec les performances et les seuils sont inverses. On est dans le cas 4 ; il est donc nécessaire de transformer les valeurs des coefficients α et β de façon à pouvoir calculer les seuils dans le sens direct.

On a les formules de transformation suivantes :

$$\alpha_p = \frac{\alpha'_p}{1 + \alpha'_p}; \beta_p = \frac{\beta'_p}{1 + \alpha'_p} \text{ et } \alpha_v = \frac{\alpha'_v}{1 + \alpha'_v}; \beta_v = \frac{\beta'_v}{1 + \alpha'_v}$$

donc, pour le seuil de préférence stricte :

$$\alpha_p = \frac{0.13}{1 + 0.13} = 0.115; \beta_p = \frac{-3000}{1 + 0.13} = -2654.87$$

et, pour le seuil de veto :

$$\alpha_v = \frac{0.9}{1+0.9} = 0.474 ; \beta_v = \frac{50000}{1+0.9} = 26315.79$$

On a :

	Prix
Action n°1 CBX16	103000
Action n°4 P605S	267400
Action n°8 R21TU	170100
Action n°9 R25BA	279700

Dans le sens direct, on déterminera la valeur des seuils à partir de la valeur la moins préférée, donc la plus chère : $g_1(9)$

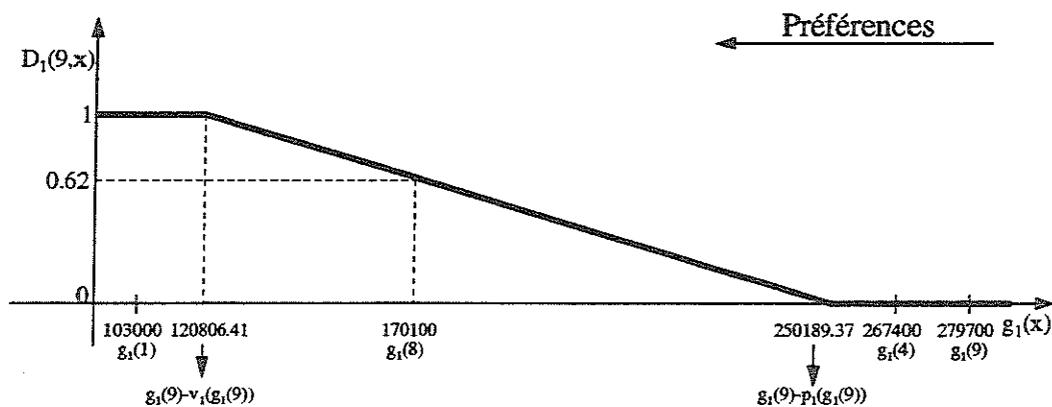
$$p_1[g_1(9)] = 0.115 * 279700 - 2654.87 = 29510.63$$

$$g_1(9) - p_1[g_1(9)] = 250189.37$$

$$v_1[g_1(9)] = 0.474 * 279700 + 26315.79 = 158893.59$$

$$g_1(9) - v_1[g_1(9)] = 120806.41$$

Observons les variations de $D_1(9,x)$ pour x meilleur que 9 :



Donc,

$$D_1(9,4) = 0 \text{ car } g_1(9) - g_1(4) < p_1[g_1(9)]$$

$$D_1(9,1) = 1 \text{ car } g_1(9) - g_1(1) > v_1[g_1(9)]$$

$D_1(9,8)$ est obtenu par interpolation linéaire :

$$D_1(9,8) = \frac{g_1(9) - p_1[g_1(9)] - g_1(8)}{v_1[g_1(9)] - p_1[g_1(9)]} = \frac{250189.37 - 170100}{158893.59 - 29510.63} = 0.62$$

De cette façon, on obtient un indice de discordance $D_j(a,b)$ relatif au critère j pour toute paire d'actions (a,b) ; $a, b \in A$.

5. La relation de surclassement floue

La relation de surclassement floue, caractérisée pour chaque paire d'actions (a,b) par un degré de crédibilité $d(a,b)$, exprime finalement dans quelle mesure "a surclasse b" globalement compte-tenu des indices de concordance et de discordance.

Le degré de crédibilité $d(a,b)$ n'est autre que l'indice de concordance $C(a,b)$ affaibli par les indices de discordance $D_j(a,b)$. Cependant, un indice de discordance $D_j(a,b)$ ne contribue à l'affaiblissement de $C(a,b)$ que s'il est suffisamment grand, c'est-à-dire si la condition suivante est remplie : $D_j(a,b) > C(a,b)$.

De façon générale, on a :

$$\text{- si } \bar{F}(a,b) = \{j \in F / D_j(a,b) > C(a,b)\} = \emptyset, \text{ alors } d(a,b) = C(a,b)$$

$$\text{- si } \bar{F}(a,b) \neq \emptyset, \text{ alors } d(a,b) = C(a,b) * \prod_{j \in \bar{F}(a,b)} \frac{1 - D_j(a,b)}{1 - C(a,b)}$$

Remarques :

- Si il existe au moins un critère j tel que $D_j(a,b) = 1$, alors $d(a,b) = 0$ quelle que soit l'importance relative de ce critère.
- Si il existe un ou plusieurs critères j tels que $0 \leq C(a,b) < D_j(a,b) < 1$, alors on ne tient pas compte de l'importance relative des critères lorsqu'on affaiblit $C(a,b)$ pour déterminer la valeur de $d(a,b)$.

EXEMPLE DE RÉFÉRENCE

A partir de la matrice de concordance globale et des matrices de discordance par critère, calculons :

- $d(1,7)$: On a $\bar{F}(1,7) = \emptyset$ car $\forall j, D_j(1,7) < C(1,7)$. Donc, $d(1,7) = C(1,7) = 0.78$

- $d(1,4)$: On a $D_6(1,4) = 1$ donc $d(1,4) = 0$

- $d(9,8)$:

On a $C(9,8) = 0.56$, $D_1(9,8) = 0.62$ et pour tout $j \neq 1$, $D_j(9,8) = 0$

Donc $\bar{F}(9,8) = \{1\}$ et $d(9,8) = 0.56 * \frac{1-0.62}{1-0.56} = 0.48$

On obtient ainsi la matrice des degrés de crédibilité suivante :

$d(a,b)$	1 CBX16	2 P205G	3 P405M	4 P605S	5 R4GTL	6 RCLIO	7 R21TS	8 R21TU	9 R25BA	10 ALPIN
1:CBX16	1	0.69	0.69	0	0.15	0.69	0.78	0.38	0.56	0.38
2:P205G	0.9	1	0.73	0.16	0.62	1	0.75	0.66	0.69	0.74
3:P405M	0.77	0.67	1	0	0	0.77	0.65	0.85	0.71	0.69
4:P605S	0	0	0.39	1	0	0	0	0.65	0.92	0.85
5:R4GTL	0.4	0	0	0	1	0	0.33	0	0	0
6:RCLIO	0.97	0.9	0.82	0	0.52	1	0.71	0.69	0.77	0.69
7:R21TS	1	0.85	0.85	0.47	0.65	0.85	1	0.76	0.78	0.76
8:R21TU	0.67	0.72	0.84	0.77	0	0.77	0.42	1	0.96	0.85
9:R25BA	0	0	0.32	0.77	0	0	0	0.48	1	0.82
10:ALPIN	0	0	0	0.35	0	0	0	0	0.77	1

6. Compléments sur les seuils inverses³

Cette section présente l'étude des variations des indices de concordance et de discordance lorsque les seuils sont inverses.

Remarques préliminaires

De façon générale, les seuils sont de la forme :

$$\text{Seuil}[g_j(a)] = \alpha * g_j(a) + \beta.$$

Les coefficients α et β sont fixés par l'utilisateur. Soient α' et β' les coefficients entrant dans le calcul d'un seuil inverse. Le programme transforme ces coefficients α' et β' en coefficients α et β de façon à ce que les seuils calculés soient des seuils directs.

Soit $c'(a,b)$ et $D'_j(a,b)$ les indices de concordance et de discordance calculés à l'aide de seuils inverses avec les coefficients α' et β' .

Soit $c_j(a,b)$ et $D_j(a,b)$ les indices de concordance et de discordance calculés à l'aide de seuils directs avec les coefficients α et β obtenus par transformation des coefficients α' et β' .

On démontre que dans le CAS 3 et le CAS 4, on a :

$$c_j(a, b) = 0 \Leftrightarrow c'_j(a, b) = 0 \quad D_j(a, b) = 0 \Leftrightarrow D'_j(a, b) = 0$$

et

$$c_j(a, b) = 1 \Leftrightarrow c'_j(a, b) = 1 \quad D_j(a, b) = 1 \Leftrightarrow D'_j(a, b) = 1$$

mais que, dans la partie interpolation, on a :

$$\text{- pour le CAS 3 : } c_j(a, b) \geq c'_j(a, b) \quad D_j(a, b) \leq D'_j(a, b)$$

$$\text{- pour le CAS 4 : } c_j(a, b) \leq c'_j(a, b) \quad D_j(a, b) \geq D'_j(a, b)$$

La méthode ELECTRE III standard et, par conséquent, le logiciel préconisent le calcul des c_j et des D_j à partir des seuils directs. Il peut s'avérer intéressant, dans certaines situations, d'utili-

³

Cette section présente des compléments théoriques qui ne sont pas nécessaires à la compréhension de la suite et peuvent être sautés en première lecture.

ser la relation obtenue avec les coefficients c' et D' . On peut obtenir alors une relation légèrement plus riche dans le cas de préférences croissantes et légèrement moins riche dans le cas de préférences décroissantes.

**ANNEXE 3 : ELECTRE IV
CONSTRUCTION DE LA RELATION DE SURCLASSEMENT FLOUE PAR
L'INTRODUCTION DES RELATIONS DE SURCLASSEMENT EMBOÎTÉES**

1. Objectif et nature des données

Lorsque l'utilisateur ne peut pas ou ne désire pas donner de jeu de poids pour la famille de critères, il devient impossible de construire la matrice de concordance (cf. ANNEXE 2) en agrégeant les préférences partielles.

ELECTRE IV utilise cinq relations de surclassement (S_q , S_c , S_p , S_s et S_v) pour construire la relation de surclassement floue.

L'emploi de ces cinq relations de surclassement repose sur deux idées directrices :

- aucun critère n'est prépondérant face à un regroupement d'une moitié quelconque des critères;
- aucun critère n'est négligeable face à un regroupement d'une moitié quelconque des critères.

Notations :

- $m_p(b,a)$: nombre de critères pour lesquels b est strictement préférée à a.
- $m_q(b,a)$: nombre de critères pour lesquels b est faiblement préférée à a.
- $m_i(b,a)$: nombre de critères pour lesquels b est indifférente à a bien que sa performance soit meilleure.
- $m_o(b,a) = m_o(a,b)$: nombre de critères pour lesquels b et a ont la même performance.

Ces notations mettent en évidence 4 cas, les trois premiers d'entre eux donnant naissance à un cas symétrique (permutation du rôle de a et b). Tout critère correspond à un et un seul des sept cas ainsi définis.

On a, donc, pour toute paire {a,b} :

$$m = m_p(a,b) + m_q(a,b) + m_i(a,b) + m_o(a,b) + m_i(b,a) + m_q(b,a) + m_p(b,a)$$

où m = nombre total de critères.

Les relations proposées sont les suivantes :

- **quasi-dominance** : S_q

$$b S_q a \Leftrightarrow \begin{cases} m_p(a, b) + m_q(a, b) = 0 \\ m_i(a, b) < m_i(b, a) + m_q(b, a) + m_p(b, a) \end{cases}$$

Des écarts défavorables à b, même inférieurs au seuil d'indifférence, interdisent, lorsqu'ils sont trop nombreux, $b S_q a$ (prise en compte d'effets de cumul).

- **dominance canonique** : S_c

$$b S_c a \Leftrightarrow \begin{cases} m_p(a, b) = 0 \\ m_q(a, b) \leq m_p(b, a) \\ m_q(a, b) + m_i(a, b) < m_i(b, a) + m_q(b, a) + m_p(b, a) \end{cases}$$

On a : $S_q \subset S_c$

$$S_q = S_c \text{ si } \{j \in F / a Q_j b\} = \emptyset, \text{ i.e. } m_q(a, b) = 0.$$

S_c est plus riche que S_q ; toutefois, pour pouvoir tolérer x critères tels que $a Q_j b$, il faut au moins x critères donnant une préférence stricte favorable à b (effet de masque).

- **pseudo-dominance** : S_p

$$b S_p a \Leftrightarrow \begin{cases} m_p(a, b) = 0 \\ m_q(a, b) \leq m_q(b, a) + m_p(b, a) \end{cases}$$

On a : $S_c \subset S_p$

S_p est plus riche que S_c (élargissement de l'effet de masque).

- **sous-dominance** : S_s

$$b S_s a \Leftrightarrow m_p(a, b) = 0$$

On a $S_p \subset S_s$

S_s est plus riche que S_p . Dès lors que pour aucun critère, a n'est strictement préférée à b, alors on a $b S_s a$

- **veto-dominance** : S_v

Soit v_j la fonction seuil de veto du critère j.

Si $g_j(a) - g_j(b)$ est supérieur strictement à $v_j[g_j(b)]$, la préférence en faveur de a selon le critère j est si fortement affirmée qu'elle constitue un veto pour "b surclasse a" quelles que soient les

préférences en faveur de b selon les autres critères.

$$b S_v a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } m_p(a, b) = 0 \\ \text{soit } \begin{cases} m_p(a, b) = 1 \\ m_p(b, a) \geq \frac{m}{2} \\ g_j(b) + v_j[g_j(b)] \geq g_j(a), \forall j \in F \end{cases} \end{cases}$$

(où m = nombre de critères).

2. La relation de surclassement floue

Pour chaque paire d'actions (a,b), on calcule un degré de crédibilité $\in [0,1]$ qui indiquera dans quelle mesure on peut affirmer que "a surclasse b". On obtient ce degré de crédibilité par la procédure suivante : pour tout couple d'actions (a,b) et sur chaque critère, on vérifie quelles relations, parmi P_j , Q_j et I_j , lient a à b. Partant de cet ensemble de relations, on calcule aisément $m_p(a,b)$, $m_q(a,b)$, $m_i(a,b)$, $m_o(a,b)$, $m_i(b,a)$, $m_q(b,a)$ et $m_p(b,a)$ pour en déduire quelles relations, parmi S_q , S_c , S_p , S_s , S_v , lient a et b. Si il y en a plusieurs, on ne conserve que la dominance la plus forte.

A chaque relation de dominance, on associe, de façon volontariste, une valeur du degré de crédibilité. On a :

- si $a S_q b$, alors $d(a,b) = 1$;
- si $a S_c b$, alors $d(a,b) = 0.8$;
- si $a S_p b$, alors $d(a,b) = 0.6$;
- si $a S_s b$, alors $d(a,b) = 0.4$;
- si $a S_v b$, alors $d(a,b) = 0.2$.

Si aucune relation parmi $\{S_q, S_c, S_p, S_s, S_v\}$ ne lie a et b, alors $d(a,b) = 0$.

En procédant ainsi pour toute paire d'actions (a,b), on obtient la matrice des degrés de crédibilité.

Remarque

Le fait d'associer une valeur du degré de crédibilité à chaque relation de dominance n'est qu'un artifice mis en jeu pour pouvoir employer l'algorithme de classement qui prend, pour point de départ, une matrice de comparaison des actions par paire avec des indicateurs compris entre 0 et 1.

Les valeurs associées à chaque relation de dominance sont étroitement liées aux différents niveaux que prendra le seuil de coupe au cours des différentes étapes du classement (cf. ANNEXE 4).

La fonction seuil de discrimination $s(\lambda)$ utilisée avec la méthode ELECTRE IV ($s(\lambda)$ est constant et égal à 0.1) fait que :

- à la première étape du classement, seule la dominance la plus forte parmi celles qui auront été vérifiées sera prise en compte ;
- à la seconde étape du classement, ce sont les deux dominances les plus fortes qui interviendront pour le classement des actions, etc.

L'utilisateur choisit, parmi les cinq relations S_q, S_c, S_p, S_s, S_v , celles qu'il désire voir prises en compte par le programme. Par exemple, s'il décide de n'employer que S_q et S_c , les degrés de crédibilité ne pourront que prendre les valeurs 1, 0.8 ou 0.

EXEMPLE DE RÉFÉRENCE

Les données de l'exemple de référence sont identiques à celles de l'Annexe 2, à l'exception des poids. Dans tout ce chapitre, les actions et les critères seront désignés par leur numéro.

Exemple 1 :

Calculons $d(2,8)$ et $d(8,2)$

On a

		Prix	Vmax	C120	Coff	Acce	Frei	Bruï
2	P205G	101300	205.3	7.9	203	8.4	78.3	73.4
8	R21TU	170100	226	9.1	419	8.1	74.7	71.7

- Pour le critère Prix, les performances sont décroissantes avec les préférences et les seuils

sont inverses.

Remarque : Pour chaque paire d'actions {a,b} et chaque critère j, nous cherchons à déterminer laquelle des cinq relations suivantes est vérifiée : $a P_j b$, $a Q_j b$, $a I_j b$, $b Q_j a$, $b P_j a$. Dans l'exemple, l'action 2 a un meilleur prix que l'action 8 donc on a soit $2 I_1 8$, soit $2 Q_1 8$ soit $2 P_1 8$, il nous reste à comparer l'écart $g_1(8) - g_1(2)$ avec la valeur du seuil d'indifférence puis éventuellement du seuil de préférence. Nous pouvons faire indifféremment, les calculs avec les seuils inverses ou avec les seuils directs (calculés par le logiciel selon les formules décrites à la fin de l'annexe 1) puisque la conversion repose sur le principe de préservation des situations préférentielles.

Pour simplifier les calculs, nous allons calculer les seuils inverses donc en fonction de la meilleure action :

$$q_1[g_1(2)] = 101300 \cdot 0.08 - 2000 = 6104$$

$$p_1[g_1(2)] = 101300 \cdot 0.13 - 3000 = 10169$$

$$g_1(8) - g_1(2) = 170100 - 101300 = 68800$$

$g_1(8) - g_1(2) > p_1[g_1(2)]$ donc on a la relation suivante $2 P_1 8$

- Pour le critère Vmax, les préférences sont croissantes avec les performances et les seuils sont directs.

On calcule donc :

$$q_2[g_2(2)] = 205.3 \cdot 0.02 = 4.106$$

$$p_2[g_2(2)] = 205.3 \cdot 0.05 = 10.265$$

$$g_2(8) - g_2(2) = 226 - 205.3 = 20.7$$

$g_2(8) - g_2(2) > p_2[g_2(2)]$ donc on a la relation suivante $8 P_2 2$

- Pour le critère C120, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_3[g_3(8)] = 1$$

$$p_3[g_3(8)] = 2$$

$$g_3(8) - g_3(2) = 9.1 - 7.9 = 1.2$$

$q_3[g_3(8)] < g_3(8) - g_3(2) < p_3[g_3(8)]$ donc on a la relation suivante $2 Q_3 8$

- Pour le critère Coff, les préférences sont croissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_4[g_4(2)] = 100$$

$$p_4[g_4(2)] = 200$$

$$g_4(8) - g_4(2) = 419 - 203 = 216$$

$g_4(8) - g_4(2) > p_4[g_4(2)]$ donc on a la relation suivante $8 P_4 2$

- Pour le critère Acce, les préférences sont décroissantes avec les performances et les

seuils sont directs. On calcule donc :

$$q_5[g_5(2)] = 8.4 * 0.1 - 0.5 = 0.34$$

$$p_5[g_5(2)] = 8.4 * 0.2 - 1 = 0.68$$

$$g_5(2) - g_5(8) = 8.4 - 8.1 = 0.3$$

$$g_5(2) - g_5(8) < q_5[g_5(1)] \text{ donc on a la relation suivante } 2 I_5 8$$

- Pour le critère Frei, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_6[g_6(2)] = 0$$

$$p_6[g_6(2)] = 5$$

$$g_6(2) - g_6(8) = 78.3 - 74.7 = 3.6$$

$$q_6[g_6(2)] < g_6(2) - g_6(8) < p_6[g_6(2)] \text{ donc on a la relation suivante } 8 Q_6 2$$

- Pour le critère Brui, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_7[g_7(2)] = 3$$

$$p_7[g_7(2)] = 5$$

$$g_7(2) - g_7(8) = 73.4 - 71.7 = 1.7$$

$$g_7(2) - g_7(8) < q_7[g_7(2)] \text{ donc on a la relation suivante } 2 I_7 8$$

On obtient ainsi $m_p(2,8) = 1$, $m_q(2,8) = 1$, $m_i(2,8) = 0$, $m_i(8,2) = 2$, $m_q(8,2) = 1$, $m_p(8,2) = 2$.

On peut donc conclure qu'aucune relation parmi S_q , S_c , S_p , S_s , S_v , ne lie 2 à 8. Par conséquent :

$$d(2,8) = 0 \text{ et } d(8,2) = 0$$

Exemple 2 :

Calculons $d(1,6)$ et $d(6,1)$.

On a

		Prix	Vmax	C120	Coff	Acce	Frei	Bru
1	CBX16	103000	171.3	7.65	352	11.6	88	69.7
6	RCLIO	103600	205.1	8.2	265	8.1	81.7	73.6

- Pour le critère Prix, les performances sont décroissantes avec les préférences et les seuils sont inverses. On calcule :

$$q_1[g_1(1)] = 103000 * 0.08 - 2000 = 6240$$

$$p_1[g_1(1)] = 103000 * 0.13 - 3000 = 10390$$

$$g_1(6) - g_1(1) = 103600 - 103000 = 600$$

$g_1(6) - g_1(1) < q_1[g_1(1)]$ donc on a la relation suivante $\text{6 I}_1 \text{ 1}$

- Pour le critère Vmax, les préférences sont croissantes avec les performances et les seuils sont directs.

On calcule donc :

$$q_2[g_2(1)] = 171.3 * 0.02 = 3.426$$

$$p_2[g_2(1)] = 171.3 * 0.05 = 8.565$$

$$g_2(6) - g_2(1) = 205.1 - 171.3 = 33.8$$

$g_2(6) - g_2(1) > p_2[g_2(1)]$ donc on a la relation suivante $\text{6 P}_2 \text{ 1}$

- Pour le critère C120, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_3[g_3(6)] = 1$$

$$p_3[g_3(6)] = 2$$

$$g_3(6) - g_3(1) = 8.2 - 7.65 = 0.55$$

$g_3(6) - g_3(1) < q_3[g_3(6)]$ donc on a la relation suivante $\text{1 Q}_3 \text{ 6}$

- Pour le critère Coff, les préférences sont croissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_4[g_4(6)] = 100$$

$$p_4[g_4(6)] = 200$$

$$g_4(1) - g_4(6) = 352 - 265 = 87$$

$g_4(1) - g_4(6) < q_4[g_4(2)]$ donc on a la relation suivante $\text{6 I}_4 \text{ 1}$

- Pour le critère Acce, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont directs. On calcule donc :

$$q_5[g_5(1)] = 11.6 * 0.1 - 0.5 = 0.66$$

$$p_5[g_5(1)] = 11.6 * 0.2 - 1 = 1.32$$

$$g_5(1) - g_5(6) = 11.6 - 8.1 = 3.5$$

$g_5(1) - g_5(6) > p_5[g_5(1)]$ donc on a la relation suivante $\text{6 P}_5 \text{ 1}$

- Pour le critère Frei, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_6[g_6(1)] = 0$$

$$p_6[g_6(1)] = 5$$

$$g_6(1) - g_6(6) = 88 - 81.7 = 6.3$$

$g_6(1) - g_6(6) > p_6[g_6(2)]$ donc on a la relation suivante $\text{6 P}_6 \text{ 1}$

- Pour le critère Brui, les préférences sont décroissantes avec les performances et les

seuils sont constants :

$$q_7[g_7(6)] = 3$$

$$p_7[g_7(6)] = 5$$

$$g_7(6) - g_7(1) = 73.6 - 69.7 = 3.9$$

$$q_7[g_7(6)] < g_7(6) - g_7(1) < p_7[g_7(6)] \text{ donc on a la relation suivante } \mathbf{1 Q_7 6}$$

On obtient ainsi : $m_p(1,6) = 0$, $m_q(1,6) = 2$, $m_i(1,6) = 2$, $m_i(6,1) = 0$, $m_q(6,1) = 0$, $m_p(6,1) = 3$.

$$m_p(1,6) = 0,$$

$$m_q(1,6) (= 2) < m_q(6,1) + m_p(6,1) (= 3),$$

donc $\mathbf{6 S_p 1}$

$$\text{mais } m_q(1,6) + m_i(1,6) (=4) > m_i(6,1) + m_q(6,1) + m_p(6,1) (=3)$$

Donc **non** $\mathbf{6 S_c 1}$

$$m_p(6,1) > 1 \text{ donc aucune relation ne lie } 1 \text{ à } 6.$$

Par conséquent :

$$d(1,6) = 0 \text{ et } d(6,1) = 0.6$$

Exemple 3 :

Calculons $d(2,6)$ et $d(6,2)$.

On a

		Prix	Vmax	C120	Coff	Acce	Frei	Bru
2	P205G	101300	205.3	7.9	203	8.4	78.3	73.4
6	RCLIO	103600	205.1	8.2	265	8.1	81.7	73.6

- Pour le critère Prix, les performances sont décroissantes avec les préférences et les seuils sont inverses.

$$q_1[g_1(2)] = 101300 * 0.08 - 2000 = 6104$$

$$p_1[g_1(2)] = 101300 * 0.13 - 3000 = 10169$$

$$g_1(6) - g_1(2) = 103600 - 101300 = 2300$$

$$g_1(6) - g_1(2) < q_1[g_1(2)] \text{ donc on a la relation suivante } \mathbf{6 I_1 2}$$

- Pour le critère Vmax, les préférences sont croissantes avec les performances et les seuils sont directs.

On calcule donc :

$$q_2[g_2(6)] = 205.1 * 0.02 = 4.102$$

$$p_2[g_2(6)] = 205.1 * 0.05 = 10.255$$

$$g_2(2) - g_2(6) = 205.3 - 205.1 = 0.2$$

$$g_2(2) - g_2(6) < q_2[g_2(6)] \text{ donc on a la relation suivante } 6 I_2 2$$

- Pour le critère C120, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_3[g_3(6)] = 1$$

$$p_3[g_3(6)] = 2$$

$$g_3(6) - g_3(2) = 8.2 - 7.9 = 0.3$$

$$g_3(6) - g_3(2) < q_3[g_3(8)] \text{ donc on a la relation suivante } 6 I_3 2$$

- Pour le critère Coff, les préférences sont croissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_4[g_4(2)] = 100$$

$$p_4[g_4(2)] = 200$$

$$g_4(6) - g_4(2) = 265 - 203 = 62$$

$$g_4(6) - g_4(2) < q_4[g_4(2)] \text{ donc on a la relation suivante } 2 I_4 6$$

- Pour le critère Acce, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont directs. On calcule donc :

$$q_5[g_5(2)] = 8.4 * 0.1 - 0.5 = 0.34$$

$$p_5[g_5(2)] = 8.4 * 0.2 - 1 = 0.68$$

$$g_5(2) - g_5(6) = 8.4 - 8.1 = 0.3$$

$$g_5(2) - g_5(6) < q_5[g_5(1)] \text{ donc on a la relation suivante } 2 I_5 6$$

- Pour le critère Frei, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_6[g_6(6)] = 0$$

$$p_6[g_6(6)] = 5$$

$$g_6(6) - g_6(2) = 81.7 - 78.3 = 3.4$$

$$q_6[g_6(6)] < g_6(6) - g_6(2) < p_6[g_6(6)] \text{ donc on a la relation suivante } 2 Q_6 6$$

- Pour le critère Brui, les préférences sont décroissantes avec les performances et les seuils sont constants :

$$q_7[g_7(6)] = 3$$

$$p_7[g_7(6)] = 5$$

$$g_7(6) - g_7(2) = 73.6 - 73.4 = 0.2$$

$$g_7(6) - g_7(2) < q_7[g_7(6)] \text{ donc on a la relation suivante } 6 I_7 2$$

BIBLIOGRAPHIE :**APPLICATIONS**

Signalons que l'ouvrage de Bernard Roy et Denis Bouyssou "Aide multicritère à la Décision" ([ROY-1993]) propose une bibliographie commentée de cas d'applications des méthodes multicritères dont les méthodes ELECTRE.

1. ELECTRE III :

- [MAR-1979a] MARCHET J.C., SISKOS J. (1979) : Aide à la décision en matière d'environnement : Application au choix de tracé autoroutier, *Sistemi Urbani* 2, p. 66-95.
- [MEN-1981] MENDOZA R.A. (1981) : **Evaluation multicritère des régions et des projets de développement du bassin Chixoy au Guatemala**, Thèse de 3^e cycle, Université de Paris-Dauphine.
- [SIS-1982] SISKOS J., HUBERT Ph. (1982) : Multicriteria analysis of the impacts of energy alternatives : A survey and a new comparative approach, *Cahier du LAMSADE* n° 41, Université de Paris-Dauphine, octobre (variante de ELECTRE III), également dans *European Journal of Operational Research*, Vol. 13, n°3, july 1983, p.278-299.
- [GOU-1983] GOUMAS A. (1983) : **Expérimentation de deux modèles complémentaires d'aide à la décision sur une base de données commune**, Mémoire de 3^{ème} cycle, Université de Paris-Dauphine.
- [LOC-1983] LOCHARD J., SISKOS J. (1983) : La gestion des risques environnementaux d'origine industrielle, dans : JACQUET-LAGREZE E. et SISKOS J. (eds), *Méthode de décision multicritère, Hommes et Techniques* (variante de ELECTRE III).
- [ROY-1983] ROY B., PRESENT M., SILHOL D. (1983) : Programmation de la rénovation des stations du métro parisien : Un cas d'application de la méthode ELECTRE III, *Document du LAMSADE* n°24, Université de Paris-Dauphine, juillet ; également publié dans *EJOR*, 24, 1986, 318-334.
- [SAL-1983] SALOMON R. (1983) : **Evaluation technico-économique multicritère d'options destinées à lutter contre un certain type de pollution**, Mémoire de 3^e cycle, Université de Paris-Dauphine.
- [SCH-1983] SCHNABELE Ph. (1983) : **Le choix d'un aménagement aquacole - Exemple d'utilisation du programme ELECTRE III**, Mémoire de 3^e cycle, Université de Paris-Dauphine.
- [SIS-1986] SISKOS J., LOMBARD J., OUDIZ A. (1986) : The use of multicriteria outranking methods in the comparison of control options against a chemical pollutant, *Journal of the Operational Research Society* 37, 357-371

- [PAR-1988] PARENT E., SCHNABELE P. (1988) : Le choix d'un aménagement aquacole - Exemple d'utilisation de la méthode ELECTRE III et comparaison avec d'autres méthodes multicritères d'aide à la décision. Document du LAMSADE n°47, Université de Paris-Dauphine, septembre.
- [BAR-1988] BARDA O.H. (1988) : Utilisation d'ELECTRE III dans un problème de choix de sites pour l'implantation de centrales thermiques. Document du LAMSADE n°48, Université de Paris-Dauphine, septembre (version abrégée publiée dans *European Journal of Operational Research*, Volume 45, nos 2-3, April 1990, 332-346, en collaboration avec J. Dupuis et P. Lencioni).
- [STE-1990] STEMPOWSKI Richard (1990) : Application de l'aide à la décision multicritère aux schémas d'aménagement des eaux, Mémoire de DEA, LAMSADE, Université de Paris-Dauphine
- [SIM-1990] SIMOS J. (1990) : Gestion des déchets solides urbains genevois : les faits, le traitement, l'analyse, chapitres 5,6 et 7 de Simos J., *Evaluer l'impact sur l'environnement*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [ROY-1991a] ROY B., SLOWINSKI R., TREICHEL W. (1991) : Multicriteria programming of rural water supply systems. Document du LAMSADE n°65, Université de Paris-Dauphine, mai, également dans K.W. Hipel (ed.), *Multiple Objective Decision Making in Water Resources*, AWRA (American Water Resources Association) Monograph Series 18, 13-32..
- 2. ELECTRE IV :**
- [HUG-1982] HUGONNARD J.C., ROY B. (1982) : Classement des prolongements de lignes de métro en banlieue parisienne (Présentation d'une méthode multicritère originale), *Cahiers du CERO*, Volume 24, n° 2-3-4, p. 153-171.
- [ROY-1982] ROY B., HUGONNARD J.C. (1982) : Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method, *Transportation Research*, Vol. 16A, n°4, p. 301-312
- [GAR-1983] GARGAILLO L. (1983) : Réponse à l'article de HUGONNARD J.C., ROY B. : Le plan d'extension du métro en banlieue parisienne, un cas type d'application de l'analyse multicritère, *Les Cahiers Scientifiques de la Revue Transport*, n°6, 1er trimestre 1982; ELECTRE IV : Une analyse multicritère agrégée limitée, *les Cahiers Scientifiques du Transport*, n°11-12, 1985, 163-186.

METHODOLOGIE

- [ROY-1974] ROY B. (1974) : Critères multiples et modélisation des préférences. (L'apport des relations de surclassement), *Revue d'Economie Politique*, 84, n°1, 1-44 (janvier-février).
- [ROY-1975] ROY B. (1975) : Vers une méthodologie générale d'aide à la décision, *Revue METRA*, Vol. XIV, n°3, 456-497.
- [ROY-1978] ROY. B. (1978) : ELECTRE III : un algorithme de classements fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples, *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle*, Vol. 20, n°1, 3-24.
- [MAR-1979b] MARCHET J.C., SISKOS J. (1979) : Decision analysis applied to environment : the case of the choice of a highway line, *Communication présentée au congrès EURO III*, Amsterdam. (9-11 avril).
- [SIS-1979] SISKOS J. (1979) : La modélisation des préférences au moyen de fonctions d'utilité additives, Thèse de 3e Cycle en Mathématiques Appliquées, Université de Paris VI (juin).
- [MAR-1979] MARTIN-FARRUGIA G., SILHOL D. (1979) : Aide à la décision pour un problème d'allocation de postes dans l'administration publique, Mémoire de DEA 3 MS, Université de Paris-Dauphine (septembre).
- [MAR-1980] MARCHET J.C. (1980) : Décision en matière d'environnement : Etudes et critères d'évaluation, Thèse de 3e Cycle en Sciences des Organisations, Université de Paris-Dauphine (juin).
- [HUG-1982] HUGONNARD J.C., ROY B. (1982) : Classement des prolongements de lignes de métro en banlieue parisienne (Présentation d'une méthode multicritère originale), *Cahiers du CERO*, Volume 24, n° 2-3-4, p. 153-171.
- [ROY-1985] ROY. B. (1985) : Méthodologie multicritère d'aide à la décision, *Economica*.
- [SCH-1985] SCHÄRLIG A. (1985) : Décider sur plusieurs critères - Panorama de l'aide à la décision multicritère, Presses Polytechniques Romandes.
- [ROY-1986] ROY B., BOUYSSOU D. (1983) : Comparison of two decision-aid models applied to a nuclear plant siting example, *EJOR*, 25, 200-215 (janvier).
- [BAR-1987] BARDA O.H. (1987) : Etude comparative des méthodes multicritères dans le cadre d'un problème de localisation, thèse de 3e cycle, - Université de Paris-Dauphine.
- [BOU-1989] BOUYSSOU D., (1989) : Problèmes de construction de critères, *Cahier du LAMSADE n°91*, Université de Paris-Dauphine (avril).

- [VIN-1989] VINCKE Ph. (1989) : **L'aide multicritère à la décision**, Editions Ellipses (France), Editions de l'Université Libre de Bruxelles (Belgique). Traduction anglaise : **Multicriteria Decision Aid** (1992), Wiley.
- [VAN-1990] VANDERPOOTEN D. (1990) : The construction of prescriptions in outranking methods, in C.A. Bana e Costa (ed.), **Readings in Multiple Criteria Decision Aid**, Springer-Verlag, 184-215.
- [ROY-1991b] ROY B. (1991) : The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, **Theory and Decision** 31, 49-73.
- [ROY-1993] ROY B., BOUYSSOU D. (1993) : **Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas**, Economica.
- [POM-1993] POMEROL J.C., BARBA-ROMERO Sergio (1993) : **Choix multicritère dans l'entreprise**, Edition Hermes.
- [MAY-1994] MAYSTRE L., PICTET J., SIMOS J. (1994) : **Méthodes multicritères ELECTRE (Description, conseils pratiques et cas d'application à la gestion environnementale)**, Presses Polytechniques Romandes

DOCUMENT N° 85

TITRE : ELECTRE III-IV, version 3.x - ASPECTS METHODOLOGIQUES
(tome 1)

AUTEUR(S) : D. VALLÉE

Pour vos commentaires à (aux) auteur(s), vous pouvez utiliser cette page et la retourner à (aux) auteur(s) concerné(s) (voir adresse en première page).

